苏州大学数学专业课讲义（草稿）

一般拓扑及其应用

General topology and its applications

编　　者　史恩慧　周丽珍

研究方向　拓扑动力系统

工作单位　苏州大学数学科学学院

更新日期:　2022/10/26

记号和约定

$\mathbb{N}$: 非负整数集

$\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}_+$): 整数集(正整数集)

$\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}_+$): 有理数集(正有理数集)

$\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$): 实数集(正实数集)

$\mathbb{C}$: 复数集

$\mathbb{R}^n$: n 维实线性空间

$\mathbb{E}^n$: n 维欧式空间

$\mathbb{S}^1$: 单位圆周

$|A|$: 集合 A 的基数

$m \mid n$: 整数 m 整除 n

A:=B: 将 B 记作 A, 或用 A 标记 B

$A \subset B$ ($A \supset B$): 集合 A 含于集合 B (集合 A 包含集合 B)

$A \subsetneq B$ ($A \supsetneq B$): 集合 A 真含于集合 B (集合 A 真包含集合 B)

$B(x,r)$ ($\overline{B}(x,r)$): x 为中心 r 为半径的开球(x 为中心 r 为半径的闭球)

$\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_2$: 拓扑 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ 粗（或 $\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ 细）

$\overline{A}$ 或 $\mathrm{Cl}(A)$: 集合 A 的闭包

$\mathring{A}$ 或 $\mathrm{Int}(A)$: 集合 A 的内部

$\mathrm{Cl}_Y(A)$: A 在 Y 中的闭包

$\partial_X(A)$: A 在 X 中的边界

$C(X,Y)$: X 到 Y 的连续映射全体

$X \cong Y$: X与Y同胚

$f|_A$: 映射 f 在 A 上的限制映射

Id_X: 集合 X 上的恒同映射

$\forall$: 对任意

$\exists$: 存在

$s.t.$: 使得

单满映射 = 双射 = 一一映射

稀疏集 = 无处稠集

绪论

一般拓扑学(或称点集拓扑学)是现代数学研究必须掌握的一门学问, 在计算机科学、材料科学、生物学、经济学、教育学等诸多领域的研究中也有直接应用. 为了响应国家提出的“加强基础学科人才培养”的号召, 苏州大学数科院增开了几门基础数学的强化课程, 一般拓扑学也位列其中. 作为这门课的任课教师, 尽管已有很多优秀的教材可供选择, 但我觉得编写一本与强化课程培养目标更为契合的教材还是有必要的. 这同时也是我希望编写一本适合“研究性学习”教材的一种尝试.

1. 本书在内容安排上有两条主线: 一条讲述点集拓扑的基础理论, 另一条主要讲述这些理论在拓扑动力学中的应用, 也附带讲述一些在加法组合和奇异拓扑等领域的应用. 这些应用内容既可以帮助读者更好地学习和掌握基础理论知识, 又可以使读者摆脱基础理论学习时引起的乏味感. 事实上, 拓扑动力学经过上百年的发展, 已是一门很成熟的学问, 理应在大学数学专业的传统教学内容中占据一席之地; 另外, 它与微分方程、组合学、数论、人工智能等领域的深刻联系也凸显了学习这门学问的必要性.

2. 本书在内容的具体组织上遵循了以下一些原则.

(2.1) 即引即用的原则. 每个定义和命题的引入, 都要立即见到它的应用. 这样, 读者不会在学了一个新概念后, 不知到它的用处在哪里; 也不会在很久以后见到它的初次应用时, 却发现原来的概念已经陌生, 还要回头重新学习. 例如, “乘积空间(2.2节)”之后安排“符号空间和转移映射(2.3节)”; “等价关系(2.4节)”安排在“商空间(2.5节)”之前, “因子和共轭(2.6节)”安排在“商空间(2.5节)”之后; 紧性和分离性安排在同一章(第三章)讲述——这样读者可以很快体会到紧性在提升分离性时起到的作用; “可数性”的定义在“可数性公理和度量化定理(第五章)”一章中引入, “可数性公理”和“度量化定理”安排在同一章; “局部紧性”的定义在“单点紧化”一节(6.1节)中引入; 6.2节后安排Stone-Čeck紧化在加法数论中的应用(6.3-6.5节); 7.2节之后安排Ascoli定理在等度连续系统结构研究中的应用(7.3节); 基数和序数的概念在Furstenberg 结构定理之前引入(7.5节); Baire纲定理与混沌性质安排在同一章讨论(第八章).

(2.2) 抽象与具体相对照的原则. 拓扑空间这一概念可以看作是对度量空间概念的进一步抽象和拓展, 而度量空间也是拓扑空间的最重要实例. 因为人是难以完全脱离具体事物而单纯思考抽象概念的, 所以我们在引入的每个拓扑学定义和命题之后, 都尽可能同时给出度量空间时的相应形式. 例如, 我们安排了如下内容: 度量空间中用点列极限刻画集合的闭包(1.4节); 度量空间中映射连续性的刻画(1.5节); 可数个度量空间乘积上相容度量的存在性(2.2节); 度量空间紧性的刻画(3.3节); 度量空间的正规性(3.3节); 等等. 第五章的度量化定理(5.3节)、网收敛(5.5节)、一致结构(5.6节)等内容则有助于读者更好地比较一般拓扑空间与度量空间之间的异同.

(2.3) 趣味性原则. 事物自身的美妙性质是我们对其感兴趣的主要原因. 一般拓扑学的经典教学内容很难说有多么的美妙, 这好比单独看一个美人的眼睛、鼻子、嘴巴等器官也难以看出多么美一样, 只有将这些器官很好地组合到一起才会引起强烈的美感. 所以, 我们补充了组合数论中的vander Waerden定理(3.8节)、Hilbert定理和Schur定理(6.5节), Bing的“狗追兔子方法”(4.7 节), Sharkovskii 定理(4.8节), Furstenberg结构定理(7.6节), 和黄-叶定理(8.5节)等内容. 这些优美的定理和方法理解起来并不困难, 不过是一般拓扑学基础理论知识的巧妙组合而已, 希望读者能够通过学习和欣赏她们, 不再对一般拓扑学产生枯燥乏味的感受.

(2.4) 开放性原则. 一本教材不应是一个论题的结束, 而应是若干论题的起点. 该教材除了涵盖一般拓扑学的经典教学内容之外, 还涉及动力系统的混沌理论、极小系统的结构理论、不动点理论、奇异拓扑学、加法组合学等研究领域的初步知识, 感兴趣的读者可以通过所提供的参考文献顺藤摸瓜, 进一步钻研相关内容. 另外, 我们还会提及几个等至今仍未完全解决的重要问题和猜测(如Borsuk猜测和Erdos猜测), 有雄心壮志的读者可以试着用这些问题和猜测挑战一下自己.

3. 本书对某些易于混淆或疏忽的概念做了特别强调

(3.1) 对道路连通、弧连通、局部连通、局部道路连通、局部弧连通、弱局部连通等概念做了细致的区分. 经常有学生甚至是教师问我道路连通和弧连通的关系. 首先, 一

般的点集拓扑教材中不大会讲弧连通性, 但一定会讲道路连通性. 读者在初次学习时, 会很自然地把道路连通的空间想象成任何不同的两点之间有一段弧(闭区间的同胚像)连接. 这对Hausdorff空间确实是对的, 但证明并不容易. 所以一般的点集拓扑教材中干脆就不提弧连通性了, 其它像局部连通性与弱局部连通性的关系也不会提及. 我们觉得尽管难以在书中给出这些概念之间强弱关系的严格证明, 但还是有必要做出澄清, 以解除读者心中的疑虑.

(3.2) 对拓扑的奇异性做了强调. 由于学生们平时接触到的拓扑空间都比较“好”(如欧氏空间或微分流形), 就容易对一般拓扑空间的复杂性认识不足, 甚至有可能在今后的理论研究中犯“想当然”的错误. 为此, 我们特别补充了不可分解连续统的内容(4.6节), 这种奇异的空间会自然出现在微分方程、动力系统、或几何学的研究中, 而其结构却与我们的直觉相背. 学生们接触了这些奇异的空间后, 就会对空间拓扑的复杂性有所认识——这就起到了提示和警醒的作用.

4. 本书特别增加了中国人的工作. 我们一直在讲文化自信, 但如果一本教材从头到尾都看不到中国人的名字, 那学生们可能要对文化自信的提法产生疑惑了. 因为历史的原因, 我们很少有人参与一般拓扑学早期理论的构建, 而一般拓扑学后期的发展虽然有很多中国人的工作, 但因为过于专门又不适合在本科生教材中讲述. 拓扑动力学的情况则要好一些, 因为其理论的系统发展要在点集拓扑学成熟以后, 所以距离我们不算太遥远; 另外, 它所要讨论的主题非常丰富, 很多基本的问题一时也难以得到解决; 这样中国人就有机会参与到这门学问的一些基础理论的建造过程中. 第8章, 我们将介绍叶向东教授和黄文教授在混沌理论中的一个基础性工作(黄-叶定理), 这一工作对两类广为人知的混沌系统的蕴含关系做出了澄清, 其方法也引发了许多后续的重要研究. 另外, 我们还会给出麦结华教授对这个定理的一个构造性的证明.

目录

第 1 章　Euler 定理

本章介绍 Euler 定理. 它对拓扑学的创建起到了重要作用.

定理1.1 (Euler 定理).

设 v, e, f 分别是一个凸多面体的顶点数, 边数, 和面数; 则 $v-e+f=2$.

证明.

(第一步) 挖掉一个面的内部, 将其余部分摊平到平面上, 挖掉的面对应摊平部分的外部 (称作外部面), 其余点线面自然对应 (这里摊平后的面称为内部面).

(第二步) 将每个内部面分割成三角形.

(第三步) 对分割后的图形依次执行以下两种操作:

操作1. 若有一个三角形与外部面恰好共两条边, 则删除此两边.

操作2. 若无三角形与外部面恰共两条边, 但有一三角形与外部面恰共一条边, 则删除此边.

如此进行下去, 最终得到一个三角形 (此时 $v-e+f=2$).

以上每个步骤都不改变 $v-e+f$ 的值, 故最初的多面体满足 $v-e+f=2$. □

注记1.2.

(1) 有的非凸多面体也满足 $v-e+f=2$.

(2) 对有些多面体, $v-e+f \neq 2$.

(3) 摊平不是严格的数学概念.

(4) 摊平后图形的边, 面不是通常意义下的边和面, 可能非常扭曲.

问题1.3.

(1) $v-e+f$ 的取值到底由多面体的何种性质决定?

(2) 摊平的严格定义是什么?

(3) 扭曲的边和面的严格定义是什么?

拓扑学将给出这些问题的回答. 我们将定义一类称为拓扑空间的数学对象, 多面体只是非常特殊的拓扑空间. 直观上, 拓扑空间可以进行既不撕破, 也不将任何两点粘合到一起连续形变. 彼此可以连续形变到对方的空间称为是同胚的. 弯曲的线段和多边形就是分别与直的线段和多边形同胚的空间. 事实上, 只要两个多面体是同胚的, 则它们的 $v-e+f$ 是相等的.

习题1.

设 P 是一个正多面体, e 是 P 的边数.

(1) 若 P 的每个面含 p 条边, 每个顶点位于 q 个面内, 则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}$;

(2) 至多只有 5 种正多面体 (正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 和正二十面体) .

第 2 章 拓扑空间和连续映射

本章中, 我们将给出拓扑空间、连续映射、和空间同胚的定义和基本性质; 我们还会给出拓扑的基和子基、拓扑空间子集的闭包和内部、拓扑的粗细关系的定义; 我们将通过一系列例子来理解这些概念. 度量空间是一类重要的拓扑空间; 我们会给出它的定义和基本例子, 并在度量空间情形给出映射连续性和集合闭包的刻画. 最后, 我们介绍动力系统、回复点、传递点的定义和重要的例子.

2.1 拓扑空间的定义

本节中, 我们将给出拓扑空间的定义和基本例子. 然后, 我们给出度量空间的定义和基本例子, 并证明度量空间中开集的全体构成一个拓扑.

定义2.1.

设 X 是一集合, $\mathcal{T}$ 是 X 的一个子集族. 若 $\mathcal{T}$ 满足以下三条:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(2) 任意并封闭: $\mathcal{T}$ 中任意个元的并仍在 $\mathcal{T}$ 中,

(3) 有限交封闭: $\mathcal{T}$ 中任意有限个元的交仍在 $\mathcal{T}$ 中,

则称 $\mathcal{T}$ 是集合 X 上的一个**拓扑**.

我们称带有一个拓扑 $\mathcal{T}$ 的集合 X 为一个**拓扑空间**, 并将其记作 $(X, \mathcal{T})$.

注记2.2.

上述定义中的"有限交封闭"条件可替换为"$\mathcal{T}$ 中任意两个元的交仍在 $\mathcal{T}$ 中".

例子2.1.

设 X 是一集合, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. 容易验证 $\mathcal{T}$ 是一个拓扑; 我们称其为 X 上的**平凡拓扑**.

例子2.2.

设 $\mathcal{T}$ 是集合 X 的全体子集构成的族. 容易验证 $\mathcal{T}$ 是一个拓扑; 我们称其为 X 上的**离散拓扑**.

从例 2.1 和 2.2 可见, 一个集合上总是有拓扑的.

例子2.3.

设 X 是一集合, $\mathcal{T} = \{A : X \setminus A \text{ 是有限的}\} \cup \{\emptyset\}$. 则 $\mathcal{T}$ 是一个拓扑; 我们称其为 X 上的**余有限拓扑**.

证明.

(1) 从 $\mathcal{T}$ 的定义可见 $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(2) 任给 $\mathcal{T}$ 的子族 $\mathcal{B}$. 若 $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$, 则 $\cup\mathcal{B} = \emptyset \in \mathcal{T}$. 否则, 存在 $B_0 \in \mathcal{B}$ 使得 $X \setminus B_0$ 是有限的. 于是 $X \setminus \cup\mathcal{B} = \cap_{B\in\mathcal{B}}(X \setminus B) \subset X \setminus B_0$ 为有限集, 即 $\cup\mathcal{B} \in \mathcal{T}$. 所以, $\mathcal{T}$ 对任意并封闭.

(3) 任给 $A, B \in \mathcal{T}$. 若 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$, 则 $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{T}$; 若 $X \setminus A$ 有限且 $X \setminus B$ 有限, 则 $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ 为有限集, 即 $A \cap B \in \mathcal{T}$. 这样, $\mathcal{T}$ 对有限交封闭. □

下面我们引入度量空间的定义. 度量空间为拓扑空间提供了自然而重要的例子.

定义2.3.

设 X 是一集合. 若映射 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 满足以下三条: 对任意的 $x, y, z \in X$,

(1) 非负性: $d(x, y) \geq 0$, 并且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$,

(2) 对称性: $d(x, y) = d(y, x)$,

(3) 三角不等式: $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$,

则称 d 是集合 X 上的一个**度量**.

我们称带有度量 d 的集合 X 为一个**度量空间**, 并将其记作 (X, d).

例子2.4.

设 $\mathbb{R}^n$ 为 n-维线性空间 $(n \geq 1)$. 对 $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$d(x, y) = (\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2)^{1/2}.$$

则 d 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个度量; 我们称其为 $\mathbb{R}^n$ 上的**欧氏度量**.

我们称带有欧式度量的线性空间 $\mathbb{R}^n$ 为 **n-维欧氏空间**, 并将其记作 $\mathbb{E}^n$.

例子2.5.

设 X 是一集合. 则

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

定义了 X 上一个度量; 我们称其为 X 上的**离散度量**.

设 (X, d) 为一度量空间. 对 $x \in X$ 及 $r > 0$, 我们用 $B_d(x, r)$ 表示以 x 为中心, r 为半径的开球; 即 $B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. 不引起混淆的前提下, 经常把 $B_d(x, r)$ 简记作 $B(x, r)$.

定义2.4.

设 (X, d) 为度量空间, $U \subset X$. 如果对每个 $x \in U$, 都存在 $\epsilon > 0$, 使得 $B(x, \epsilon) \subset U$, 则称 U 是 X 的**开集**.

习题2.

设 (X,d) 为度量空间, $x\in X$, $r>0$. 证明: 开球 $B(x,r)$ 是开集.

习题3.

设 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. 证明: $(a,b)\times(c,d)$ 是 $\mathbb{E}^2$ 的开集.

命题2.5.

设 (X,d) 为度量空间, $\mathcal{T}$ 是 X 上的开集全体. 则 $\mathcal{T}$ 为 X 上的一个拓扑.

证明.

显然 $\emptyset,X\in\mathcal{T}$. 任意给定 $U,V\in\mathcal{T}$ 及 $x\in U\cap V$; 则存在 $r_1,r_2>0$, 使得 $B(x,r_1)\subset U$ 且 $B(x,r_2)\subset V$. 令 $r=\min\{r_1,r_2\}$; 则 $B(x,r)\subset U\cap V$. 这蕴含 $\mathcal{T}$ 对有限交封闭. 为证 $\mathcal{T}$ 对任意并封闭, 设 $\mathcal{U}\subset\mathcal{T}$. 若 $x\in\cup\,\mathcal{U}$, 则对某个 $U\in\mathcal{U}$, 有 $x\in U$. 于是, 存在 $r>0$, 使得 $B(x,r)\subset U\subset\cup\,\mathcal{U}$. □

注记2.6.

命题 2.5 表明度量空间中的开集全体构成拓扑; 我们称其为**由度量 d 所诱导的拓扑**. 今后, 除非特别说明, 我们总是在这个意义下视一个度量空间为拓扑空间.

习题4.

设 d 为 X 上的离散度量. 证明: d 所诱导的拓扑是离散拓扑.

注记2.7.

设 (X,d) 是度量空间, $Y\subset X$. 考虑映射 $d_Y:Y\times Y\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto d(x,y)$. 显然, d_Y 是 Y 上的度量, 从而 (Y,d_Y) 成为度量空间; 称其为 (X,d) 的**度量子空间**. 今后, 除非特别说明, 我们都以这种方式将一个度量空间的子集视作度量空间.

下面定义将开集概念从度量空间拓展到一般拓扑空间.

定义2.8.

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间. 称 $\mathcal{T}$ 中的元为 X 的**开集**; 称开集的补集为**闭集**.

从定义可见，空集$\emptyset$和全空间X既是开集又是闭集.

定义2.9.

设$(X,\mathcal{T})$为拓扑空间，$x\in X$, $A\subset X$. 如果存在开集U使得$x\in U\subset A$, 则称A是x的**邻域**; 若A本身是开集，则称A是x的**开邻域**.

下面命题在判断一个集合是否为开集时经常用到.

命题2.10.

设Y是拓扑空间$(X,\mathcal{T})$的子集. 如果对每个$x\in Y$, 都存在x的邻域A使得$x\in A\subset Y$, 则Y是X的开集.

证明.

对每个$x\in Y$, 由题中条件和邻域的定义，存在开集U_x使得$x\in U_x\subset Y$; 则$Y=\cup_{x\in X}U_x$. 根据拓扑的"任意并封闭"性质，我们知Y 是开集. □

定义2.11.

设$(X,\mathcal{T})$为拓扑空间，$x\in X$. 若$\{x\}$是开集，则称x是X的**孤立点**.

习题5. 证明: 一个拓扑空间X是离散的当且仅当它是点点孤立的.

习题6. 设$X=[0.1]\cup\{2\}$是$\mathbb{E}^1$的度量子空间(见注记2.7). 则$[0,1]$是X的开集，2是X的孤立点.

2.2 拓扑的基和子基

本节中，我们将给出拓扑的基和子基的定义. 然后我们给出集族生成拓扑的定义，并给出一个集族为其生成拓扑的拓扑基的充要条件.

定义2.12.

设$(X,\mathcal{T})$为拓扑空间，$\mathcal{B}$是$\mathcal{T}$的一个子族. 如果$\mathcal{T}$中每个元都是$\mathcal{B}$中元的并，则称$\mathcal{B}$是$\mathcal{T}$或X 的一个**拓扑基**.

例子2.6.

设 (X,d) 是一度量空间, $\mathcal{T}$ 为度量 d 所诱导的拓扑. 则 $\mathcal{B}:=\{B(x,r):x\in X,r>0\}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个拓扑基.

习题7.

设 (X,d) 是一度量空间, $c>0$. 证明: 集族 $\mathcal{C}:=\{B(x,r):x\in X,0<r<c\}$ 是 d 所诱导拓扑的一个拓扑基.

习题8.

证明: 集族 $\{(a,b)\times(c,d):a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ 构成 $\mathbb{E}^2$ 的一个拓扑基.

命题2.13.

设 $\mathcal{A}$ 为集合 X 的一个子集族, $\mathcal{T}$ 是 X 上包含 $\mathcal{A}$ 的所有拓扑的交. 则 $\mathcal{T}$ 为 X 上一个拓扑 (称为**由 $\mathcal{A}$ 生成的拓扑**).

设 $\mathcal{A}$ 为集合 X 的一个子集族. 一个自然的问题是何时 $\mathcal{A}$ 是它所生成拓扑的拓扑基? 下面命题给出了该问题的一个回答.

命题2.14.

设 $\mathcal{A}$ 为集合 X 的一个子集族. 若 $\mathcal{A}$ 满足以下两条:

(1) 足够广: 对任意 $x\in X$, 都存在 $U\in\mathcal{A}$ 使得 $x\in U$,

(2) 足够细: 对任意 $U,V\in\mathcal{A}$ 及 $x\in U\cap V$, 都存在 $W\in\mathcal{A}$ 使得 $x\in W\subset U\cap V$,

则 $\mathcal{A}$ 是它所生成拓扑的拓扑基.

证明.

设 $\mathcal{T}=\{T:T\text{是}\mathcal{A}\text{中某些元的并}\}$. 则 $\mathcal{T}$ 必含于 $\mathcal{A}$ 所生成的拓扑之中. 下面只要证 $\mathcal{T}$ 是一个拓扑, 则 $\mathcal{T}$ 必是 $\mathcal{A}$ 所生成的拓扑, 从而 $\mathcal{A}$ 是其所生成拓扑的拓扑基. 显然, $\emptyset\in\mathcal{T}$; 由条件 (1) 知 $X\in\mathcal{T}$. 设 $T,S\in\mathcal{T}$, 则存在 $\mathcal{A}$ 的子族 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$, 使得 $T=\cup\mathcal{P}$ 且 $S=\cup\mathcal{Q}$. 这样, $T\cap S=\cup_{U\in\mathcal{P},V\in\mathcal{Q}}(U\cap V)$; 由条件 (2) 知, $U\cap V$ 仍是 $\mathcal{A}$ 中元的并, 从而 $T\cap S$ 是 $\mathcal{A}$ 中元的并. 所以, $\mathcal{T}$ 满足有限交封闭的性质. 从 $\mathcal{T}$ 定义立知其满足任意并封闭的性质. □

定义2.15.

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间, $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}$. 如果 $\mathcal{S}$ 中元的有限交全体构成 $\mathcal{T}$ 的拓扑基, 则称 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{T}$ 的**拓扑子基**.

例子2.7.

设 $\mathcal{T}$ 为 $\mathbb{E}^1$ 的欧式度量所诱导的拓扑, $\mathcal{S}=\{(-\infty,a):a\in\mathbb{R}\}\cup\{(b,+\infty):b\in\mathbb{R}\}$. 则 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{T}$ 的拓扑子基.

例子2.8.

设 $\mathcal{T}$ 是集合 X 上的余有限拓扑. 则集族 $\mathcal{B}:=\{X\setminus\{x\}:x\in X\}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个拓扑子基.

习题9.

证明: 集族 $\{(-\infty,a)\times\mathbb{R}:a\in\mathbb{R}\}\cup\{(b,+\infty)\times\mathbb{R}:b\in\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R}\times(-\infty,c):c\in\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R}\times(d,+\infty):d\in\mathbb{R}\}$ 构成 $\mathbb{E}^2$ 的一个拓扑子基.

2.3 拓扑的粗细比较

本节中, 我们将给出两个拓扑之间粗细关系的定义, 并用拓扑粗细关系给出集族生成拓扑的刻画.

定义2.16.

设 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是集合 X 上两个拓扑. 如果 $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$, 则称 $\mathcal{T}_1$ **比** $\mathcal{T}_2$ **粗** (或 $\mathcal{T}_2$ **比** $\mathcal{T}_1$ **细**); 记作 $\mathcal{T}_1\prec\mathcal{T}_2$.

例子2.9.

集合 X 上的平凡拓扑比其上的任何拓扑都粗, 而 X 上的离散拓扑比其上的任何拓扑都细.

下面例子表明一个集合上的两个拓扑并非总可以比较粗细.

例子2.10.

设集合 $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$. 则 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是集合 X 上两个拓扑但不能比较粗细.

例子2.11.

设 $\mathcal{A}$ 是集合 X 的一个子集族. 则由 $\mathcal{A}$ 生成的拓扑是所有包含 $\mathcal{A}$ 的拓扑里最粗的拓扑.

命题2.17.

设 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是集合 X 上两个拓扑, $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$ 分别是它们的拓扑基. 如果对任意 $U \in \mathcal{B}_1$ 及任意 $x \in U$, 都存在 $V \in \mathcal{B}_2$ 使得 $x \in V \subset U$, 则 $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_2$.

证明. 设 $W \in \mathcal{T}_1$ 及 $x \in W$. 取 $U_x \in \mathcal{B}_1$, 使得 $x \in U_x \subset W$. 于是, 存在 $V_x \in \mathcal{B}_2$ 使得 $x \in V_x \subset U_x$. 这样, $W = \cup_{x \in U} V_x \in \mathcal{T}_2$. 所以, $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, 即 $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_2$. □

2.4 闭包、内部、和边界

本节中, 我们将给出拓扑空间中子集的闭包、内部、和边界的定义. 我们还将用序列收敛的概念给出度量空间中子集闭包的刻画.

命题2.18.

设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, $\mathcal{F}$ 是 X 的闭集全体. 则 $\mathcal{F}$ 中的元满足以下三条:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,

(2) 任意交封闭: $\mathcal{F}$ 中任意个元的交仍在 $\mathcal{F}$ 中,

(3) 有限并封闭: $\mathcal{F}$ 中任意有限个元的并仍在 $\mathcal{F}$ 中.

定义2.19.

设 A 是拓扑空间 X 的子集. 我们将包含 A 的所有闭集的交称作 A 的**闭包**, 并记其为 $\overline{A}$ 或 $\mathrm{Cl}(A)$.

由命题 2.18(2) 和闭包的定义可见, $\overline{A}$ 是在集合包含关系下包含 A 的最小闭集; 特别地, 闭集的闭包是自己.

命题2.20.

设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间, $A\subset X$, $x\in X$. 则 $x\in\overline{A}$ 当且仅当 x 的每个开邻域与 A 的交非空.

证明.

($\Longrightarrow$) 假设存在 x 的开邻域 U, 使得 $U\cap A=\emptyset$. 则 $A\subset X\setminus U$ 但 $x\notin X\setminus U$. 而 $X\setminus U$ 是闭集; 这与 $x\in\overline{A}$ 相矛盾.

($\Longleftarrow$) 假设 $x\notin\overline{A}$. 则存在闭集 $B\supset A$ 使得 $x\notin B$. 这样, x 含于开集 $X\setminus B$. 而 $X\setminus B$ 交 A 为空集; 这导致矛盾. $\square$

例子2.12.

(1) 设 $X=\mathbb{R}$, $A=(0,1)$. 则 $\overline{A}=[0,1]$.

(2) 设 $X=(0,+\infty)$, $A=(0,1)$. 则 $\overline{A}=(0,1]$.

例子2.13.

设 $X=\mathbb{R}^2, A=\{(x,y):y=\sin\frac{1}{x},0<x\leq 1\}$. 则 $\overline{A}=A\cup\{(0,y):-1\leq y\leq 1\}$.

定义2.21.

设 X 是一个集合. 我们称一个映射 $\phi:\mathbb{Z}_+\to X, n\mapsto x_n$, 为 X 中的一个**点列**, 并将其记作 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 或简记为 (x_n).

定义2.22.

设 (x_n) 是度量空间 (X,d) 中的点列, $z\in X$. 如果对任意 $\epsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $d(x_n,z)<\epsilon$, 则称点列 (x_n) **收敛**到 z, 或 z 是 (x_n) 的**极限点**; 记作 $\lim x_n=z$ 或 $x_n\to z$.

注记2.23.

简洁起见, 我们经常把"存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, ..." 简述为"当 n 充分大时, ..."; 或"对充分大的 n, ...".

命题2.24.

设 (X,d) 是度量空间, $A\subset X$, $x\in X$. 则 $x\in\overline{A}$ 当且仅当 x 是 A 中某个点列的极限点.

证明.

($\Longrightarrow$) 设 $x \in \overline{A}$; 则对每个正整数 n, 有 $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$; 取 $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. 易见, $x_n \to x$.

($\Longleftarrow$) 设 (x_n) 是 A 中点列且 $x_n \to x$. 设 U 是 x 的开邻域; 则存在 $r > 0$, 使得 $B(x, r) \subset U$. 于是, 当 n 充分大时, 有 $x_n \in B(x, r) \subset U$; 特别地, $A \cap U \neq \emptyset$. 由命题 2.20, 知 $x \in \overline{A}$. $\square$

习题10.

设k是正整数. 证明:

(1) $\overline{\cup_{i=1}^k A_i} = \cup_{i=1}^k \overline{A_i}$.

(2) $\overline{\cup_{i=1}^\infty A_i} \supset \cup_{i=1}^\infty \overline{A_i}$. 举例说明该包含关系可以是真的.

(3) $\overline{\cap_{i=1}^k A_i} \subset \cap_{i=1}^k \overline{A_i}$. 举例说明该包含关系可以是真的.

定义2.25.

若 A 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的子集且 $\overline{A} = X$, 则称 A 在 X 中**稠密**.

例子2.14.

有理数集 $\mathbb{Q}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中稠密.

例子2.15.

设 $\mathcal{T}$ 是集合 X 上的余有限拓扑, $A \subset X$. 若 A 是无限集, 则 A 在 X 中稠密.

定义2.26.

设 A 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的子集. 称集合 $\{x \in A : \exists\ U\ s.t.\ x \in U \subset A\}$ 为 A 的**内部**, 并将其记作 $\overset{\circ}{A}$ 或 $\mathrm{Int}(A)$.

从定义可见, 集合 A 的内部是含于 A 的集合包含关系下的最大开集.

例子2.16.

(1) 设 $X = \mathbb{R}, A = [0, 1]$. 则 $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$.

(2) 设 $X = [0, +\infty), A = [0, 1]$. 则 $\overset{\circ}{A} = [0, 1)$.

命题2.27.

$X\setminus \mathring{A}=\overline{X\setminus A}$.

定义2.28.

设 A 是拓扑空间 X 的子集. 称集合 $\overline{A}\cap\overline{X\setminus A}$ 为 A 在 X 中的**边界**; 记作 $\partial_X(A)$.

命题2.29.

设 A 是拓扑空间 X 的子集. 则

(1) $\partial_X(A)$ 是由既不在 A 的内部, 也不在 $X\setminus A$ 的内部的点构成;

(2) 若 A 是开集, 则 $\partial_X(A)=\overline{A}\setminus A$;

(3) 若 A 是闭集, 则 $\partial_X(A)=A\setminus \mathring{A}$.

例子2.17.

设 $X=\mathbb{E}^2$, d 是其上的欧氏度量, $A=B(0,1)$. 则 $\partial_X(A)=\{x\in X:d(x,0)=1\}$.

例子2.18.

设 $(X,\mathcal{T})$ 是离散拓扑空间, $A\subset X$. 则 $\partial_X(A)=\emptyset$.

例子2.19.

设 $X=\mathbb{E}^1$, $A=\mathbb{Q}$. 则 $\partial_X(A)=X$.

2.5 连续映射和同胚

本节中, 我们先给出映射连续性的定义并给出连续性的一些等价刻画. 同时, 我们用ϵ-δ 语言和序列收敛的概念给出了度量空间之间映射连续性的刻画. 然后, 我们给出同胚映射和空间同胚的定义, 并证明空间同胚关系的等价性.

定义2.30.

设 $f:X\to Y$ 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射. 如果对 Y 中每个开集 V, $f^{-1}(V)$ 都是 X 中开集, 则称 f 是**连续**的.

命题2.31.

设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射, $\mathcal{B}$ 是 Y 的拓扑基或拓扑子基. 如果对每个 $V \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(V)$ 都是 X 中开集, 则 f 是连续的.

证明.

(1) 设 $\mathcal{B}$ 是 Y 的拓扑基. 任给 X 的开集 U. 设 $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ 满足 $U = \cup\, \mathcal{C}$. 这样, $f^{-1}(U) = f^{-1}(\cup_{V\in\mathcal{C}} V) = \cup_{V\in\mathcal{C}} f^{-1}(V)$ 是 X 的开集. 所以, f 是连续的.

(2) 设 $\mathcal{B}$ 是 Y 的拓扑子基, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}$ 的任一有限子族. 则 $f^{-1}(\cap\mathcal{F}) = \cap_{V\in\mathcal{F}} f^{-1}(V)$ 是 X 的开集. 因 $\mathcal{B}$ 中元的所有有限交构成 Y 的拓扑基, 由 (1) 知 f 是连续的. □

命题2.32.

设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射. 则下列条件等价:

(1) f 连续;

(2) 对 X 的任一子集 A, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(3) 对 Y 的任一闭集 B, $f^{-1}(B)$ 是 X 的闭集.

证明.

(1) $\Longrightarrow$ (2). 设 $x \in \overline{A}$, V 是 $f(x)$ 的任一开邻域. 则 $f^{-1}(V)$ 为 x 的开邻域. 于是, $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$. 取 $a \in f^{-1}(V) \cap A$; 则 $f(a) \in V \cap f(A) \neq \emptyset$. 由 V 的任意性知, $f(x) \in \overline{f(A)}$. 这样, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 由 $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B} = B$, 得 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$. 又 $f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$, 故 $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$. 因此, $f^{-1}(B)$ 是闭集.

(3) $\Longrightarrow$ (1). 设 V 是 Y 的开集; 则 $Y \setminus V$ 是闭集. 于是, $X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V)$ 是 X 的闭集. 所以, $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集. 这样, f 连续. □

定义2.33.

设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射, $x \in X$. 如果对 $f(x)$ 的每个开邻域 V, 存在 x 的开邻域 U, 使得 $f(U) \subset V$, 则称 f **在点 x 处连续**.

命题2.34.

设 $f : X \to Y$ 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射. 则 f 是连续的当且仅当对每个 $x \in X$, f 在 x 处是连续的.

证明.

$(\Longrightarrow)$ 任给 $f(x)$ 的开邻域 V. 因 f 连续, 所以 $f^{-1}(V)$ 是 x 的开邻域. 令 $U = f^{-1}(V)$; 则 $f(U) = V$.

$(\Longleftarrow)$ 设 V 是 Y 的开集. 任给 $x \in f^{-1}(V)$; 则 $f(x) \in V$. 于是, 存在 x 的开邻域 U, 使得 $f(U) \subset V$; 即 $U \subset f^{-1}(V)$. 这样, $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集. 所以, f 连续. □

命题2.35.

设 (X, d) 和 (Y, ρ) 为度量空间, $f : X \to Y$ 为一个映射, $x \in X$. 则下面条件等价:

(1) f 在点 x 处连续;

(2) 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $d(x, y) < \delta$ 时, 有 $\rho(f(x), f(y)) < \epsilon$;

(3) 对任意收敛到 x 的序列 (x_n), 都有 $(f(x_n))$ 收敛到 $f(x)$.

证明.

(1) $\Longrightarrow$ (2). 任给 $\epsilon > 0$. 设 $V = B(f(x), \epsilon)$; 则存在 x 的开邻域 U 使得 $f(U) \subset V$. 取 $\delta > 0$ 使得 $B(x, \delta) \subset U$. 这样, 对每个 $y \in B(x, \delta)$, 有 $f(y) \in B(f(x), \epsilon)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 任给 $\epsilon > 0$. 设 $\delta > 0$ 满足 $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$. 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, $x_n \in B(x, \delta)$. 于是, $f(x_n) \in B(f(x), \epsilon)$ $(\forall n > N)$. 这样, $f(x_n) \to f(x)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). 假设 f 在 x 处不连续; 则存在 $f(x)$ 的开邻域 V, 使得对每个 x 的开邻域 U, 有 $f(U) \not\subset V$; 特别地, 对每个正整数 n, 存在 $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ 满足 $f(x_n) \notin V$. 这样, $x_n \to x$ 但 $f(x_n) \nrightarrow f(x)$. 矛盾. □

例子2.20.

初等函数在有定义的点处都是连续的.

例子2.21.

设 A 是 $n \times n$ 实系数矩阵. 则映射 $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n, v \mapsto Av$, 是连续的.

例子2.22.

设 (X,d) 是度量空间, $x \in X$. 则函数 $d_x : X \to \mathbb{R}, y \mapsto d(x,y)$, 是连续的.

证明.

设点列 (y_n) 收敛到 y. 由三角不等式, 我们有 $|d_x(y) - d_x(y_n)| = |d(x,y) - d(x,y_n)| \leq d(y,y_n)$. 这蕴含$d_x(y_n) \to d_x(y)$. 由命题 2.35 知 d_x是连续的. □

例子2.23.

拓扑空间 X 上的恒同映射 $\mathrm{Id}_X : X \to X, x \mapsto x$, 是连续的.

命题2.36.

若 $f : X \to Y$ 及 $g : Y \to Z$ 是连续映射, 则 $g \circ f : X \to Z$ 是连续的.

证明.

任给 Z 的开集 W. 因 g 连续, 故 $g^{-1}(W)$ 是 Y 中开集; 又 f 连续, 故 $f^{-1}(g^{-1}(W))$ 是 X 的开集. 所以, $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ 是 X 的开集; 即 $g \circ f$ 是连续的. □

对拓扑空间 X 和 Y, 我们用 $C(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 的连续映射全体.

推论2.37.

$C(X,X)$ 在映射复合下构成一个含幺半群.

定义2.38.

如果 $f : X \to Y$ 是一一的连续映射, 并且 f^{-1} 也连续, 则称 f 是**同胚**. 如果存在从 X 到 Y 的同胚, 则称拓扑空间 X 和 Y 是**同胚的**, 并记作 $X \cong Y$.

设 $\mathbb{S}^1 := \{e^{2\pi i t} : t \in \mathbb{R}\}$ 为复平面内单位圆周.

例子2.24.

设 $\alpha \in \mathbb{R}$. 则映射 $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, e^{2\pi \mathrm{i} t} \mapsto e^{2\pi \mathrm{i}(t+\alpha)}$, 是同胚; 我们称其为圆周上的**刚性旋转**.

例子2.25.

若 A 是 $n\times n$ 实系数可逆矩阵, 则 $T:\mathbb{E}^n\to\mathbb{E}^n, v\mapsto Av$, 是同胚.

例子2.26.

设 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $a<b$. 则 $(a,b)\cong\mathbb{R}$.

例子2.27.

设 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$ 是平面内的闭圆盘, $K=\{(x,y):|x|\leq 1,|y|\leq 1\}$ 是平面内的正方形. 则 $D\cong K$.

例子2.28.

映射 $f:[0,1)\to\mathbb{S}^1, x\mapsto e^{2\pi \mathrm{i} x}$, 是连续双射但不是同胚.

命题2.39.

(1) 若 $\mathrm{Id}_X:X\to X$ 为恒同映射, 则 Id_X 为同胚.

(2) 若 $f:X\to X$ 为同胚, 则 $f^{-1}:X\to X$ 为同胚.

(3) 若 $f:X\to Y$ 及 $g:Y\to Z$ 为同胚, 则 $g\circ f:X\to Z$ 为同胚.

对拓扑空间X, 我们用 $\mathrm{Homeo}(X)$ 表示从 X 到自己的同胚的全体.

推论2.40.

$\mathrm{Homeo}(X)$ 在映射复合下构成一个群.

下面命题是命题 2.39 的直接推论.

命题2.41.

设 X,Y,Z 是拓扑空间. 则

(1) $X\cong X$ (**自反性**);

(2) 若 $X\cong Y$, 则 $Y\cong X$ (**对称性**);

(3) 若 $X\cong Y$ 且 $Y\cong Z$, 则 $X\cong Z$ (**传递性**).

注记2.42.

命题 2.41 另一种说法是: 同胚关系是拓扑空间类上的**等价关系**. 等价关系的详细定义将在第 2 章给出.

定义2.43.

设 $f : X \to Y$ 是一映射. 若 f 将开集映为开集, 则称 f 是**开映射**; 若 f 将闭集映为闭集, 则称 f 是**闭映射**.

显然, 同胚既是开映射, 也是闭映射.

命题2.44.

设 $f : X \to Y$ 是连续的一一映射. 如果 f 是开映射或闭映射, 则 f 为同胚.

证明.

我们只对 f 是开映射情形证明, 闭映射情形类似可证. 任给 X 的开集 U. 因 f 是开映射, 故 $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ 是开集. 这样 f^{-1} 连续. 所以 f 是同胚. □

例子2.29.

映射 $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, z \mapsto z^2$, 是连续的开映射; 我们称其为圆周到自身的 2-**重覆盖映射**.

例子2.30.

映射

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2 - 2x, & 1/2 \le x \le 1, \end{cases}$$

是 $[0,1]$ 到自身的连续开映射; 我们称其为 $[0,1]$ 上的**帐篷映射**.

习题11.

证明: 例 2.28 中的 f 既不是开映射, 也不是闭映射.

2.6 回复点和传递点*

本节中, 我们将先给出动力系统的定义. 然后, 我们给出周期点、回复点、点传递性、和极小性的定义, 并对通过一些基本的例子理解这些概念.

定义2.45.

设 S 是一个半群. 我们称一个半群同态 $\phi: S \to C(X,X)$ 为 S 在 X 上的一个**连续作用**; 记作(X,S,ϕ).

定义2.46.

对于 $f \in C(X,X)$, 我们规定: $f^0 = \mathrm{Id}_X$; 对正整数 n, 用 f^n 表示 n 个 f 的复合. 则映射 $\phi: \mathbb{N} \to C(X,X), n \mapsto f^n$, 定义了非负整数半群 $\mathbb{N}$ 在 X 上的一个连续作用; 我们称该作用为一个**动力系统**（或简称为**系统**）, 并记作 (X,f); 称 X 是该系统的**相空间**.

定义2.47.

设 (X,f) 是动力系统, $x \in X$. 称集合 $\mathcal{O}(x,f) := \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ 为点 x 的**轨道**.

动力系统是现实世界中某些“随时间演化系统”数学模型的进一步抽象, 其理论主要研究轨道在相空间中的分布状态. 轨道的回复性和传递性是最为关心的两种性质, 它们描绘的是系统中某种状态随时间演化而不断“循环往复”或“各态历经”的现象——这对于我们理解和掌控世界显然是极为重要的.

定义2.48.

设 (X,f) 是动力系统, $x \in X$. 若存在正整数 n 使得 $f^n(x) = x$, 则称 x 为**周期点**; 最小的这样的正整数 n 称为 x 的**周期**, 这时 x 也称为 n **周期点**. 若 x 是周期为 1 的点, 即 $f(x) = x$, 则称 x 是**不动点**.

习题12.

(1) 若 x 是系统 (X,f) 的 n-周期点, 则 $\mathcal{O}(x,f)$ 恰含 n 个点. 请举例说明逆命题不成立.

(2) 设 $f: X \to X$ 是满射. 若 X 是有限集, 则 X 中每个点都是周期点.

命题2.49.

设 x 是动力系统 (X,f) 的 n 周期点. 若 $f^m(x)=x$, 则 $n|m$.

定义2.50.

设 (X,f) 是动力系统, $x\in X$. 若对 x 的任一邻域 U, 都存在正整数 n, 使得 $f^n(x)\in U$, 则称 x 是**回复点**.

命题2.51.

周期点是回复点.

命题2.52.

设 (X,f) 是动力系统, 其中 X 是度量空间. 则 x 是回复的当且仅当存在正整数序列 $n_1<n_2<\dots$ 使得 $f^{n_i}(x)\to x$.

习题13.

例2.24中, 若 α 是有理数, 则每个点都是周期的且所有点具有相同的周期.

习题14.

例 2.29 中, $(\mathbb{S}^1,f)$ 的周期点集稠密.

习题15.

例 2.30 中, $([0,1],f)$ 的周期点集稠密.

习题16.

例 2.24 中, 若 α 是无理数, 则每个点都是非周期的回复点.

习题17.

请举一个没有回复点的动力系统的例子.

定义2.53.

设 (X,f) 是一动力系统. 如果存在点 $x\in X$ 使得轨道 $\mathcal{O}(x,f)$ 在 X 中稠密, 则称 x 是**拓扑传递点** (或简称为**传递点**), 称系统 (X,f) 是**点传递**的.

习题18.

例 2.29 和 2.30 中的系统是点传递的.

命题2.54.

设 (X, f) 是动力系统, $x \in X$. 如果 X 是度量空间且 x 是非孤立的传递点, 则 x 是回复的.

习题19.

请举例说明命题 2.54 中"非孤立"这一条件是必要的.

定义2.55.

设 (X, f) 是拓扑动力系统. 如果 X 中每个点都是传递点, 则称 (X, f) 是**极小**的.

习题20.

例 2.24 中, 若 α 是无理数, 则 $(\mathbb{S}^1, R_\alpha)$ 是极小的.

第 3 章　从已有空间构造新空间

本章中, 我们将给出子空间、乘积空间、和商空间的定义, 并通过与它们相伴的一些自然映射的映射性质来刻画这些空间的拓扑. 相应地, 对于动力系统, 我们也会给出子系统、乘积系统、和因子系统的定义, 并通过具体的例子来理解这些概念. 我们还会给出拓扑空间可度量化的定义, 并讨论一列度量空间乘积的度量化问题.

3.1　子空间

本节中, 我们将给出子空间的定义, 并通过含入映射的映射性质刻画子空间拓扑. 然后, 我们给出子空间的闭集和集合闭包的刻画. 最后, 我们给出嵌入的定义, 并在度量空间情形通过序列收敛给出嵌入的刻画.

命题3.1.

设 $(X,\mathcal{T})$ 是一拓扑空间, $Y\subset X$, $\mathcal{T}_Y=\{Y\cap U:U\in\mathcal{T}\}$. 则 $\mathcal{T}_Y$ 是 Y 上一个拓扑.

证明.

我们验证拓扑的三条公理.

(1) $\emptyset=Y\cap\emptyset\in\mathcal{T}_Y$; $Y=Y\cap X\in\mathcal{T}_Y$.

(2) 任给 $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}_Y$. 对每个 $U\in\mathcal{B}$, 设 $\tilde{U}\in\mathcal{T}$ 满足 $U=Y\cap\tilde{U}$. 则 $\cup_{U\in\mathcal{B}}U=\cup_{U\in\mathcal{B}}(Y\cap\tilde{U})$ $=Y\cap(\cup_{U\in\mathcal{B}}\tilde{U})\in\mathcal{T}_Y$.

(3) 任给 $U,V\in\mathcal{T}_Y$. 设 $\tilde{U},\tilde{V}\in\mathcal{T}$ 满足 $U=Y\cap\tilde{U},V=Y\cap\tilde{V}$. 则 $U\cap V=(Y\cap\tilde{U})\cap(Y\cap\tilde{V})=Y\cap(\tilde{U}\cap\tilde{V})\in\mathcal{T}_Y$. □

定义3.2.

我们称命题 3.1 中的 $\mathcal{T}_Y$ 为 Y 的**子空间拓扑**, 称 $(Y,\mathcal{T}_Y)$ 为 $(X,\mathcal{T})$ 的**子空间**.

命题3.3.

A 是 $(Y,\mathcal{T}_Y)$ 的闭子集当且仅当存在 X 的闭集 $\widetilde{A}$ 使得 $A=\widetilde{A}\cap Y$.

证明.

注意这样一个事实：若 $B \subset X$, 则 $Y \setminus (Y \cap B) = (X \setminus B) \cap Y$. 然后直接按定义验证即可. $\square$

对于 $A \subset Y$, 我们用 $\mathrm{Cl}_Y(A)$ 表示 A 在 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 中的闭包, 仍用 $\overline{A}$ 表示 A 在 $(X, \mathcal{T})$ 中的闭包.

命题3.4.

$\mathrm{Cl}_Y(A) = \overline{A} \cap Y$.

证明.

由命题3.3, 知 $\overline{A} \cap Y$ 是 Y 的闭子集. 这蕴含 $\mathrm{Cl}_Y(A) \subset \overline{A} \cap Y$. 设 $x \in \overline{A} \cap Y$. 对 x 在 Y 中的任一开邻域 V, 设 U 是 X 的开集且满足 $V = U \cap Y$. 则 $V \cap A = U \cap A \neq \emptyset$. 所以 $x \in \mathrm{Cl}_Y(A)$. 这样, 我们得到 $\mathrm{Cl}_Y(A) \supset \overline{A} \cap Y$. $\square$

例子3.1.

设 $X = \mathbb{R}, Y = (0, +\infty), A = (0, 1)$. 则 $\overline{A} = [0, 1], \mathrm{Cl}_Y(A) = (0, 1]$.

习题21.

证明: 若 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{T}$ 的拓扑基, 则 $\{Y \cap U : U \in \mathcal{B}\}$ 为 $\mathcal{T}_Y$ 的拓扑基.

命题3.5.

设 Y 是度量空间 (X, d) 的子集, d_Y 是 d 在 Y 上的限制度量; 则 Y 的子空间拓扑与 d_Y 所诱导拓扑是一致的.

证明.

根据习题21, 集族 $\mathcal{B} := \{Y \cap B_d(x, r) : x \in X, r > 0\}$ 是 Y 的子空间拓扑的一个拓扑基. 而 Y 上由 d_Y 所诱导拓扑的一个拓扑基为 $\mathcal{C} := \{B_{d_Y}(y, r) : y \in Y, r > 0\}$. 注意到 $B_{d_Y}(y, r) = Y \cap B_d(y, r)$, 故 d_Y 所诱导拓扑比子空间拓扑粗. 反之, 若 $y \in Y \cap B_d(x, r)$, 则存在 $s > 0$ 使得 $B_d(y, s) \subset B_d(x, r)$. 这样, $B_{d_Y}(y, s) \subset Y \cap B_d(y, s) \subset Y \cap B_d(x, r)$. 所以, d_Y 所诱导拓扑比子空间拓扑细. 这便完成了证明. $\square$

例子3.2.

将$\mathbb{R}$等同于$\mathbb{R}^2$的实轴, 则$\mathbb{R}$上欧氏度量所诱导的拓扑与$\mathbb{R}$作为$\mathbb{R}^2$的子集所得子空间拓扑是一致的.

命题3.6.

设Y是拓扑空间$(X,\mathcal{T})$的子集, $\imath: Y \to X, x \mapsto x$为含入映射. 则$\mathcal{T}_Y$是使$\imath$连续的$Y$上最粗的拓扑.

证明.

设$U \in \mathcal{T}$; 则$\imath^{-1}(U) = U \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. 所以$\imath$ 连续. 设$\mathcal{A}$是Y上使得$\imath$为连续的任一拓扑; 则对每个$U \in \mathcal{T}$, 有 $U \cap Y = \imath^{-1}(U) \in \mathcal{A}$. 所以$\mathcal{T}_Y \prec \mathcal{A}$. □

习题22.

若$f : X \to Y$连续且$Z \subset X$, 则关于子空间拓扑, 映射$\tilde{f} : Z \to f(Z), x \mapsto f(x)$, 也是连续的.

定义3.7.

设$f : X \to Y$是连续单射. 如果关于$f(X)$的子空间拓扑, 映射$\tilde{f} : X \to f(X), x \mapsto f(x)$, 是同胚, 则称$f$是**嵌入**.

命题3.8.

若$(Y, \mathcal{T}_Y)$是$(X,\mathcal{T})$的子空间, 则含入映射$\imath : Y \to X$ 是嵌入.

证明.

由命题3.6知$\imath$是连续单射. 再由习题22知, $\tilde{\imath} : Y \to Y, y \mapsto y$, 也是连续单射. 只要再证$\tilde{\imath}$是开映射. 为此, 设$U$是$Y$的开子集; 则$\tilde{\imath}(U) = U$仍为$Y$的开集. 所以, $\tilde{\imath}$是同胚. □

命题3.9.

设X, Y是度量空间, $f : X \to Y$是连续单射; 则f是嵌入当且仅当对每个$z \in f(X)$及收敛到z的$f(X)$中点列(y_n), 成立$(f^{-1}(y_n))$收敛到$f^{-1}(z)$.

证明.

由习题 22 知 $\tilde{f}: X \to f(X), x \mapsto f(x)$ 是连续单射. 所以只要证 $\tilde{f}^{-1}$ 连续当且仅当对每个 $z \in f(X)$ 及收敛到 z 的 $f(X)$ 中点列 (y_n), 成立 $(f^{-1}(y_n))$ 收敛到 $f^{-1}(z)$. 而这是命题 3.5 和命题 2.35 的直接推论. □

例子3.3.

设 $f:(-1,1) \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, \frac{x}{1-x^2})$. 则 f 是一个嵌入.

例子3.4. 设 $f:[0,1) \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$. 则 f 是连续单射而非嵌入.

3.2 子系统*

本节中, 我们将给出子系统的定义, 并通过子系统刻画极小性.

定义3.10.

设 (X,f) 是一动力系统, Y 是 X 的闭子集. 若 $f(Y) \subset Y$, 则由习题 *22* 知 $f|_Y : Y \to Y$ 是连续的. 我们称 $(Y, f|_Y)$ 为 (X,f) 的**子系统**; 若进一步 $\emptyset \neq Y \subsetneq X$, 则称 $(Y, f|_Y)$ 为 (X,f) 的**真子系统**

例子3.5.

设 p 为 (X,f) 的周期点, $Y = \mathcal{O}(p,f)$; 则 $(Y, f|_Y)$ 是 (X,f) 的子系统.

例子3.6.

设 (X,f) 为一动力系统, $x \in X$, $Y = \overline{\mathcal{O}(x,f)}$; 则 $(Y, f|_Y)$ 是 (X,f) 的子系统.

命题3.11.

动力系统 (X,f) 是极小的当且仅当它不含真子系统.

3.3 乘积空间

本节中, 我们给出乘积空间和投影的定义, 并通过投影的映射性质刻画乘积拓扑. 然

后, 我们给出拓扑空间可度量化以及度量等价的定义, 并讨论度量空间乘积空间的度量化问题.

定义3.12.

设 A 为一个指标集合. 对每个 $a \in A$, 设 X_a 为一个集合. 称映射的集合 $\{x : A \to \cup_{a\in A} X_a \mid x(a) \in X_a\}$ 为集族 $\{X_a\}_{a\in A}$ 的**乘积**; 记作 $\Pi_{a\in A} X_a$. 设 $b \in A$; 称映射 $p_b : \Pi_{a\in A} X_a \to X_b$, $x \mapsto x(b)$, 为 $\Pi_{a\in A} X_a$ 到分量 X_b 的**投影**.

记号说明:

(1) 对乘积空间 $\Pi_{a\in A} X_a$ 中的元素 x 及 $a \in A$, 记 $x_a = x(a)$; 这样 x 可记作 $(x_a)_{a\in A}$, 或简记作 (x_a).

(2) 若对每个 $a \in A$ 有 $X_a = X$, 则 $\Pi_{a\in A} X_a$ 也记作 X^A; 若 $A = \{1, ..., n\}$, 则 X^A 也记作 X^n.

(3) 若 $A = [m, +\infty)$, 我们也把 $\Pi_{i\in A} X_i$ 记作 $\Pi_{i=m}^{\infty} X_i$, 或 $X_m \times X_{m+1} \times \cdots$.

(4) 若 $A = \{1, ..., n\}$, 则也将 $\Pi_{a\in A} X_a$ 记作 $\Pi_{i=1}^{n} X_i$, 或 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

定义3.13.

设 A 为一指标集. 对每个 $a \in A$, 设 $(X_a, \mathcal{T}_a)$ 为一拓扑空间. 设 $\mathcal{B} = \{\Pi_{a\in A} U_a : U_a \in \mathcal{T}_a$, 且除有限个 a 外 $U_a = X_a\}$. 称由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑为集合 $\Pi_{a\in A} X_a$ 上的**乘积拓扑**; 称带有乘积拓扑的集合 $\Pi_{a\in A} X_a$ 为**乘积空间**.

命题3.14.

定义 3.13 中的集族 $\mathcal{B}$ 是 $\Pi_{a\in A} X_a$ 上乘积拓扑的拓扑基; 集族 $\mathcal{S} := \{\Pi_{a\in A} U_a : U_a \in \mathcal{T}_a$ 且除一个 a 外 $U_a = X_a\}$ 是 $\mathcal{B}$ 是 $\Pi_{a\in A} X_a$ 上乘积拓扑的拓扑子基.

证明.

因 $\Pi_{a\in A} X_a \in \mathcal{B}$, 所以 $\mathcal{B}$ 是足够广的. 下证 $\mathcal{B}$ 是足够细的. 任给 $V, W \in \mathcal{B}$. 则存在有限集 $F_V, F_W \subset A$ 满足 $V = \Pi_{a\in A} V_a$ 及 $W = \Pi_{a\in A} W_a$, 其中 $V_a, W_a \in \mathcal{T}_a$ 且 $V_a = X_a (\forall a \notin F_V)$, $W_a = X_a (\forall a \notin F_W)$. 若 $(x_a) \in V \cap W$, 则对每个 $a \in F_V \cup F_W$, 存在 $U_a \in \mathcal{T}_a$ 使

得 $x_a \in U_a \subset V_a \cap W_a$. 这样, $(x_a) \in \Pi_{a\in F_v\cup F_W} U_a \times \Pi_{a\notin F_v\cup F_W} X_a \subset V \cap W$. 由命题 2.17 知 $\mathcal{B}$ 是乘积拓扑的拓扑基. 由定义立见 $\mathcal{S}$ 是乘积拓扑的拓扑子基. □

命题3.15.

$\Pi_{a\in A} X_a$ 上的乘积拓扑是使得每个投影 $p_b(b \in A)$ 为连续的最粗的拓扑.

证明.

任给 $U \in \mathcal{T}_b$. 则 $p_b^{-1}(U) = U_b \times \Pi_{a\neq b} X_a$. 由乘积拓扑的定义知 $p_b^{-1}(U)$ 是开集. 所以 p_b 连续. 假设 $\mathcal{T}'$ 是使得每个 p_b 都连续的 $\Pi_{a\in A} X_a$ 上另一拓扑. 则对每个 $b \in A$ 及 $U \in \mathcal{T}_b$, $p_b^{-1}(U) \in \mathcal{T}'$. 而由习题 3.14, $\{p_b^{-1}(U) : b \in A, U \in \mathcal{T}_b\}$ 构成了 $\Pi_{a\in A} X_a$ 上乘积拓扑的拓扑子基. 这蕴含 $\Pi_{a\in A} X_a$ 上的乘积拓扑比 $\mathcal{T}'$ 粗. □

习题23.

证明 $\mathbb{R}^2$ 上欧氏度量所诱导的拓扑与 $\mathbb{R}^2$ 作为两个 $\mathbb{R}$ 乘积的乘积拓扑是一致的.

证明.

设 d 是 $\mathbb{R}^2$ 上的欧氏度量. 则集族 $\mathcal{B} := \{B_d(x, r) : x \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$ 构成 d 所诱导的拓扑的拓扑基. 由习题 3.14 知集族 $\mathcal{C} := \{(a, b) \times (c, d) : a < b, c < d\}$ 构成 $\mathbb{R}^2$ 上乘积拓扑的拓扑基. 由命题 2.17 知两者所生成的拓扑是一致的. □

定义3.16.

设 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间. 如果 X 上存在一个度量 d, 使得 d 所诱导的拓扑与 $\mathcal{T}$ 一致, 则称 d 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 上的一个**相容度量**, 称拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 是**可度量化**的.

习题24.

(1) 证明离散拓扑空间是可度量化的.

(2) 请举一个不可度量化的拓扑空间的例子.

命题3.17.

设 $(X_i, d_i), i = 1, ..., n,$ 是 n 个度量空间. 则 $\rho((x_i), (y_i)) := \max\{d_i(x_i, y_i) : i = 1, ..., n\}$ 定义了乘积空间 $\prod_{i=1}^n X_i$ 上的一个相容度量.

证明.

容易验证 ρ 是 $\prod_{i=1}^n X_i$ 上的一个度量. 下证相容性. 任给 X_i 的开集 U_i, $i = 1, \cdots, n$. 设 $(x_i) \in \Pi_{i=1}^n U_i$. 则对每个 i, 存在 $r_i > 0$ 使得 $B_{d_i}(x_i, r_i) \subset U_i$. 令 $r = \min\{r_1, \cdots, r_n\}$. 则 $B_\rho((x_i), r) \subset \Pi_{i=1}^n U_i$. 这样 ρ 生成的拓扑比 $\prod_{i=1}^n X_i$ 上的乘积拓扑细. 反之, 任给 $(x_i) \in \prod_{i=1}^n X_i$及$r > 0$. 由 ρ 的定义, 我们有 $B_\rho((x_i), r) = \Pi_{i=1}^n B_{d_i}(x_i, r)$; 这是$\prod_{i=1}^n X_i$ 的乘积拓扑下的开集. 这样 $\prod_{i=1}^n X_i$ 的乘积拓扑比 ρ 诱导的拓扑细. 相容性得证. □

习题25.

请定义 $\prod_{i=1}^n X_i$ 上的其它相容度量.

定义3.18.

若 d_1 和 d_2 是集合 X 上的度量并且诱导相同的拓扑, 则称 d_1 与 d_2 是**等价**的.

引理3.19.

设 (X, d) 是度量空间. 则 $\tilde{d}(x, y) := \min\{(d(x, y), 1)\}$ 定义了 X 上的一个与 d 等价的度量.

证明.

容易验证 $\tilde{d}$ 是一个度量. 从定义可见, 当 $0 < r < 1$ 时, $B_d(x, r) = B_{\tilde{d}}(x, r)$. 由习题7 知 d 和 $\tilde{d}$ 等价. □

命题3.20.

设 $(X_i)_{i=1}^\infty$ 是一列可度量化空间, $Y = \prod_{i=1}^\infty X_i$. 则 Y 是可度量化的.

证明.

对每个 i, 设 d_i 是 X_i 的一个相容度量. 由引理3.19, 对每个 i, 我们不妨假设 $d_i(x, y) \leq 1$ $(\forall x, y \in X_i)$. 容易验证 $\rho((x_i), (y_i)) := \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i)$ 定义了 Y 上的一个度量. 下证 ρ 与乘积拓扑相容. 任给正整数 n 及 X_i 的开集 U_i, $i = 1, \cdots, n$. 设 $(x_i) \in \Pi_{i=1}^n U_i \times \Pi_{i=n+1}^\infty X_i$. 则对每个 $i \in \{1, \cdots, n\}$, 存在 $r_i > 0$ 使得 $B_{d_i}(x_i, r_i) \subset U_i$. 令$r = \min\{r_1, \cdots, r_n\}$. 由 ρ 的定义, 易见 $B_\rho((x_i), \frac{r}{2^n}) \subset \Pi_{i=1}^n U_i \times \Pi_{i=n+1}^\infty X_i$. 这样, Y 的乘积拓扑比 ρ 所诱导的拓扑粗. 反之, 任给 $(x_i) \in Y$ 及 $r > 0$; 则存在正整数 N 使得 $\sum_{i=N+1}^\infty \frac{1}{2^i} <$

$\frac{r}{2}$. 对 $i \in \{1, \cdots, N\}$, 取 $r_i < r/N$; 则 $\Pi_{i=1}^{N} B_{d_i}(x_i, r_i) \times \Pi_{i=N+1}^{\infty} X_i \subset B_\rho((x_i), r)$. 这样, Y 的乘积拓扑比 ρ 所诱导的拓扑细. 我们便完成了证明. □

命题3.21.

映射 $\phi : Y \to \prod_{a\in A} X_a$ 是连续的当且仅当对每个 a, $p_a \circ \phi$ 都是连续的.

证明.

($\Longrightarrow$) 因每个 p_a 都是连续的, 所以符合映射 $p_a \circ \phi$ 是连续的.

($\Longleftarrow$) 设 $a \in A$, U 为 X_a 中开集. 则由 $p_a \circ \phi$ 的连续性, 有 $\phi^{-1}(p_a^{-1}(U)) = (p_a \circ \phi)^{-1}(U)$ 为 Y 的开集. 而 $\{p_a^{-1}(U) : a \in A, U \in \mathcal{T}_a\}$ 构成了 $\prod_{a\in A} X_a$ 的拓扑子基, 所以 ϕ 连续. □

习题26.

证明: 对每个 $j \in \{1, ..., n\}$, 投影 $p_j : \prod_{i=1}^{n} X_i \to X_j$ 是开映射. 它是否一定是闭映射?

3.4 符号空间和转移映射*

本节中, 我们将给出符号序列空间和转移映射的定义, 并对这类系统验证周期点的稠密性和点传递性.

定义3.22.

考虑由 k 个元素构成的离散空间 $\{1, ..., k\}$. 我们称乘积空间 $\Sigma_k^+ := \{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}_+}$ 为 k 个符号的**符号序列空间**, 其中的元素称为**符号序列**.

习题27.

证明: 映射 $d : \Sigma_k^+ \times \Sigma_k^+ \to \mathbb{R}, ((x_i), (y_i)) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$, 是 Σ_k^+ 上一个相容度量.

证明.

见命题 3.20 的证明. □

习题28.

证明: 函数

$$d((x_i),(y_i)) = \begin{cases} (\min\{i : x_i \neq y_i\})^{-1}, & (x_i) \neq (y_i), \\ 0, & (x_i) = (y_i), \end{cases}$$

是 Σ_k^+ 上一个相容度量.

证明.

任给正整数 n 及 $\{1, \cdots, k\}$ 的开集 U_i $(i = 1, \cdots, n)$. 设 $(x_i) \in \Pi_{i=1}^n U_i \times \Pi_{i=n+1}^{\infty} X_i$, 其中 $X_i = \{1, \cdots, k\}$ $(\forall i \geq n+1)$. 若 $(y_i) \in \Sigma_k^+$ 满足 $d((x_i),(y_i)) < \frac{1}{n}$, 则由 d 的定义有 $x_i = y_i$ $(\forall i \in \{1, \cdots, n\})$. 这样 $B_d((x_i), \frac{1}{n}) \subset \Pi_{i=1}^n U_i \times \Pi_{i=n+1}^{\infty} X_i$. 所以 d 所诱导的 Σ_k^+ 上的拓扑比其上的乘积拓扑细.

反之, 任给 $(x_i) \in \Sigma_k^+$ 及 $r > 0$. 设正整数 n 满足 $\frac{1}{n+1} < r$. 则由 d 的定义知 $\Pi_{i=1}^n \{x_i\} \times \Pi_{i=n+1}^{\infty} X_i \subset B_d((x_i), r)$, 其中 $X_i = \{1, \cdots, k\}$ $(\forall i \geq n+1)$. 这蕴含 d 所诱导的 Σ_k^+ 上的拓扑比其上的乘积拓扑粗. □

定义3.23.

我们称由 $(\sigma(x))_i = x_{i+1}$ $(\forall i \geq 1)$ 所定义的映射 $\sigma : \Sigma_k^+ \to \Sigma_k^+$ 为符号序列空间 Σ_k^+ 上的**转移映射**.

习题29.

证明: 转移映射 $\sigma : \Sigma_k^+ \to \Sigma_k^+$ 是连续的. 这样 (Σ_k^+, σ) 构成一个动力系统.

习题30.

证明: 系统 (Σ_k^+, σ) 是周期点稠密的.

习题31.

证明: (x_i) 是系统 (Σ_k^+, σ) 的回复点当且仅当对每个正整数 n 都存在正整数列 $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ 使得 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_{k_i}, x_{k_i+1}, \cdots, x_{k_i+n})$ $(\forall i \geq 1)$.

习题32.

请构造系统 (Σ_k^+, σ) 中一个非周期的回复点.

习题33.

证明: 系统 (Σ_k^+, σ) 是点传递的.

3.5 乘积系统*

本节中, 我们将给出乘积系统和弱混合性的定义, 并检验几种系统的弱混合性质.

定义3.24.

设 (X, f) 和 (Y, g) 是两个系统; 则映射 $f \times g : X \times Y \to X \times Y, (x, y) \mapsto (f(x), f(y))$, 是连续的. 这样, $(X \times Y, f \times g)$ 构成一个动力系统, 称为 (X, f) 和 (Y, g) 的**乘积系统**.

定义3.25.

若系统 (X, f) 满足 $(X \times X, f \times f)$ 是点传递的, 则称 (X, f) 是**弱混合**的.

命题3.26.

若 (X, f) 是弱混的, 则它是点传递的.

习题34.

证明: 系统 (Σ_k^+, σ) 是弱混合的.

习题35.

证明: 例 2.29 中, $(\mathbb{S}^1, f)$ 是弱混的.

习题36.

证明: 例 2.30 中, $([0, 1], f)$ 是弱混的.

习题37.

证明: 例 2.24 中, $(\mathbb{S}^1, R_\alpha)$ 不是弱混的.

3.6 等价关系

本节中, 我们将给出集合上等价关系和等价类的定义, 并证明集合上等价关系和集合的划分之间的对应关系.

定义3.27.

设 X 是一个集合, R 是 $X\times X$ 的一个子集. 如果下面三条成立, 则称 R 是 X 上一个**等价关系**:

(1) 自反性：对任意 $x\in X$, 有 $(x,x)\in R$;

(2) 对称性：若 $(x,y)\in R$, 则 $(y,x)\in R$;

(3) 传递性：若 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in R$, 则 $(x,z)\in R$.

定义3.28.

设 X 是一个集合, R 是 X 上的等价关系. 对 $x\in X$, 称集合 $[x]:=\{y:(x,y)\in R\}$ 为 x 关于关系 R 的**等价类**.

定义3.29.

设 X 是一个集合, $\mathcal{P}$ 是 X 的一个子集族. 如果 $X=\cup\mathcal{P}$ 并且对任意 $A,B\in\mathcal{P}$ 成立: 或者 $A\cap B=\emptyset$, 或者 $A=B$, 则称 $\mathcal{P}$ 是 X 的一个**划分**.

命题3.30.

设 R 是集合 X 上的一个等价关系. 则等价类全体 $X/R:=\{[x]:x\in X\}$ 构成了集合 X 的一个划分.

证明.

由等价关系的定义知, 对每个 $x\in X$, 有 $x\in[x]$; 所以 $X=\cup_{x\in X}[x]$. 设 $x,y\in X$ 使得 $[x]\cap[y]\neq\emptyset$. 任取 $z\in[x]\cap[y]$; 则 $(x,z)\in R$ 且 $(y,z)\in R$. 再由等价关系的定义知 $(z,y)\in R$, 进而 $(x,y)\in R$. 于是, 对每个 $y'\in[y]$ 有 $(x,y')\in R$. 这样, $[y]\subset[x]$. 对称地, $[x]\subset[y]$. 所以, $[x]=[y]$. □

命题3.31.

设 X 是一个集合, $\mathcal{P}$ 是集合 X 的一个划分. 设 $R=\{(x,y)\in X\times X:\exists A\in\mathcal{P}\ s.t.\ \{x,y\}\subset A\}$. 则 R 是 X 上的一个等价关系.

证明.

由划分的定义易见, R 的自反性和对称性成立. 设 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in R$; 则存在 $A,B\in\mathcal{P}$, 使得 $\{x,y\}\subset A$ 且 $\{y,z\}\subset B$. 因 $y\in A\cap B$, 由划分的定义知 $A=B$. 于是, $\{x,z\}\subset A$, 即 $(x,z)\in R$. 所以, R 的传递性成立. □

从命题 3.30 和命题 3.31, 我们容易看出一个集合上的等价关系和划分之间是一一对应的.

3.7 商空间

本节中, 我们将给出商拓扑的定义, 并通过映射性质给出商拓扑的刻画. 然后, 我们证明一个映射分解性质. 最后, 我们引入商映射的定义, 并证明商映射的像空间其实就是某种商空间.

设 R 是集合 X 上的等价关系. 我们自然有映射 $\pi: X\to X/R, x\mapsto [x]$.

命题3.32.

设 R 是拓扑空间 X 上的一个等价关系, $\mathcal{T}=\{U\subset X/R : \pi^{-1}(U)$ 是 X 的开集$\}$; 则 $\mathcal{T}$ 构成 X/R 上的一个拓扑.

证明.

我们验证 $\mathcal{T}$ 满足拓扑的三条公理.

(1) 由 $\emptyset=\pi^{-1}(\emptyset)$ 和 $X=\pi^{-1}(X/R)$ 知 $\emptyset, X/R\in\mathcal{T}$.

(2) 任给 $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$. 则对每个 $U\in\mathcal{B}$, 有 $\pi^{-1}(U)$ 是 X 的开集. 这样 $\pi^{-1}(\cup_{U\in\mathcal{B}}U)=\cup_{U\in\mathcal{B}}\pi^{-1}(U)$ 是 X 的开集. 这蕴含 $\cup_{U\in\mathcal{B}}U\in\mathcal{T}$. 所以 $\mathcal{T}$ 对任意并封闭.

(3) 任给 $U,V\in\mathcal{T}$. 则 $\pi^{-1}(U),\pi^{-1}(V)$ 是 X 的开集. 这样 $\pi^{-1}(U\cap V)=\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)$ 是 X 的开集. 这蕴含 $U\cap V\in\mathcal{T}$. 所以 $\mathcal{T}$ 满足有限交封闭条件. □

定义3.33.

我们称命题 3.32 中的 $\mathcal{T}$ 为 X/R 上的商拓扑. 称带有商拓扑的集合 X/R 为 X 的商空间.

命题3.34.

X/R 上的商拓扑是使 $\pi : X \to X/R, x \mapsto [x]$ 为连续的最细的拓扑.

证明.

设 $\mathcal{T}$ 是 X/R 的商拓扑. 任给 $U \in \mathcal{T}$. 由商拓扑的定义知 $\pi^{-1}(U)$ 是 X 的开集. 所以 π 是连续的. 若 $\mathcal{T}'$ 是使得 π 为连续的 X/R 上的另一拓扑, 则对每个 $U \in \mathcal{T}'$, $\pi^{-1}(U)$ 是 X 的开集. 根据商拓扑的定义, 我们有 $U \in \mathcal{T}$. 所以 $\mathcal{T}'$ 比 $\mathcal{T}$ 粗. □

命题3.35.

设 R 是拓扑空间 X 上的一个等价关系. 若 $f : X \to Y$ 是连续映射并且 f 在每个等价类 $[x]$ 上取常值, 则存在唯一的连续映射 $\tilde{f} : X/R \to Y$ 使得 $f = \tilde{f} \circ \pi$.

证明.

因 f 在每个 $[x] \in X/R$ 上取常值, 所以映射 $\tilde{f} : X/R \to Y, [x] \mapsto f(x)$ 是良定义的. 显然, $f = \tilde{f} \circ \pi$. 设 U 是 Y 的开集. 则 $\pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$ 为 X 的开集. 由商拓扑的定义知, $\tilde{f}^{-1}(U)$ 为 X/R 的开集. 所以 $\tilde{f}$ 连续. 映射 $\tilde{f}$ 的唯一性由条件 $f = \tilde{f} \circ \pi$ 决定. □

定义3.36.

设 $f : X \to Y$ 是连续的满射. 若对任意 $A \subset Y$, $f^{-1}(A)$ 是开集蕴含 A 是开集, 则称 f 是商映射.

命题3.37.

关于 X/R 的商拓扑, $\pi : X \to X/R$ 是商映射.

命题3.38.

设 $f : X \to Y$ 是连续满射. 若 f 是开映射或闭映射, 则 f 是商映射.

证明.

任给 $U \subset Y$.

(1) 设 f 是开映射. 若 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开集, 则由 f 的开映射性质得 $U = f(f^{-1}(U))$ 为 Y

的开集. 所以 f 是商映射.

(2) 设 f 是闭映射. 若 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开集, 则 $f^{-1}(Y\setminus U)=X\setminus f^{-1}(U)$ 为 X 的闭子集. 而 f 是闭映射, 所以 $Y\setminus U$ 是 Y 的闭子集, 即 U 是 Y 的开子集. 所以 f 是商映射. □

习题38.

请举出一个不是商映射的连续满射的例子.

命题3.39.

设 $f:X\to Y$ 是商映射, $R=\{(x,y)\in X\times X: f(x)=f(y)\}$. 则 R 是等价关系, 并且 $Y\cong X/R$.

证明.

容易验证 R 是等价关系. 设 $\pi:X\to X/R$ 为自然的商映射. 由 R 的定义可见, f 在每个 $[x]\in X/R$ 上取常值. 根据命题 3.35, 存在唯一的连续映射 $\tilde{f}:X/R\to Y$ 使得 $\tilde{f}\circ\pi=f$. 显然 $\tilde{f}$ 是既单且满的. 为证 $\tilde{f}$ 为同胚, 只要证 $\tilde{f}$ 是开映射. 为此, 设 U 是 X/R 的开集. 则 $f^{-1}(\tilde{f}(U))=\pi^{-1}(U)$ 为 X 的开集. 而 f 是商映射, 所以 $\tilde{f}(U)$ 为 Y 的开集. □

例子3.7.

设 $X=\mathbb{E}^1$, $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x-y\in\mathbb{Z}\}$, $\mathbb{S}^1$ 是复平面内的单位圆周. 则 R 是等价关系, 且 $X/R\cong\mathbb{S}^1$.

证明.

考虑映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1, x\mapsto e^{2\pi\mathrm{i}x}$. 容易验证 f 是连续开映射, 进而是商映射. 应用命题 3.39 即可完成证明. □

我们将例 3.7 中的 X/R 记作 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

习题39.

设 $\alpha\in\mathbb{R}$. 则映射 $T_\alpha:\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}, [x]\mapsto[x+\alpha]$ 是一个同胚.

证明.

由 R 的定义可见, $[x]=[y]$ 当且仅当 $[x+\alpha]=[y+\alpha]$. 这蕴含 T_α 是良定义的双射. 考虑商映射 $\pi:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ 和同胚 $L_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x+\alpha$. 容易验证 $\pi\circ L_\alpha=T_\alpha\circ\pi$. 这样, 对 $\mathbb{S}^1$ 的任意开集 U, 我们有 $\pi^{-1}(T_\alpha^{-1}(U))=L_\alpha^{-1}(\pi^{-1}(U))$ 为 $\mathbb{R}$ 的开集. 而 π 是商映射, 所以 $T_\alpha^{-1}(U)$ 是 $\mathbb{S}^1$ 的开集. T_α 的连续性得证. 为证 T_α 是同胚, 我们只要证其是开映射. 为此, 设 V 是 $\mathbb{S}^1$ 的开集. 注意到 T_α 是双射, 我们有 $\pi^{-1}(T_\alpha(V))=L_\alpha(\pi^{-1}(V))$ 为 $\mathbb{R}$ 的开集. 这蕴含 $T_\alpha(V)$ 是 $\mathbb{S}^1$ 的开集. 所以 T_α 是开映射. □

例子3.8.

设 R 是由划分 $\mathcal{A}=\{\{x,-x\}:x\in\mathbb{S}^1\}$ 所决定的等价关系. 则 $\mathbb{S}^1/R\cong\mathbb{S}^1$.

证明.

考虑映射 $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1, x\mapsto x^2$. 证明 f 是开映射并应用命题3.39. □

例子3.9.

设 $X=\mathbb{E}^2\setminus\{0\}$, $R=\{(x,y)\in X\times X\}$: 存在正实数 c 使得 $x=cy\}$. 则 R 是 X 上的等价关系, 且 $X/R\cong\mathbb{S}^1$.

证明.

考虑映射 $f:X\to\mathbb{S}^1, x\mapsto\frac{x}{||x||}$. 证明 f 是开映射并应用命题3.39. □

3.8 因子和共轭*

本节中, 我们将给出动力系统共轭、半共轭的定义, 并讨论点的回复性和传递性在因子下的保持性质.

定义3.40.

设 (X,f) 和 (Y,g) 是动力系统. 如果存在连续满射 $\phi:X\to Y$ 使得对每个 $x\in X$ 成立 $\phi(f(x))=g(\phi(x))$, 则称 ϕ 是从 (X,f) 到 (Y,g) 的**半共轭**; 称 (Y,g) 是 (X,f) 的因

子, (X,f) 是 (Y,g) 的**扩张**. 如果半共轭 ϕ 是同胚, 则称 ϕ 是从 (X,f) 到 (Y,g) 的**共轭**; 称 (X,f) 与 (Y,g) 是**共轭的**, 并记作 $(X,f)\cong(Y,g)$.

命题3.41.

设 $(X,f),(Y,g),(Z,h)$ 是动力系统. 则

(1) $(X,f)\cong(X,f)$,

(2) 若 $(X,f)\cong(Y,g)$, 则 $(Y,g)\cong(X,f)$,

(3) 若 $(X,f)\cong(Y,g)$ 且 $(Y,g)\cong(Z,h)$, 则 $(X,f)\cong(Z,h)$.

例子3.10.

系统 (X,f) 和 (Y,g) 是它们乘积系统 $(X\times Y,f\times g)$ 的因子.

例子3.11.

设 α 为一实数, R_α 的定义见例 2.24. 则系统 $(\mathbb{S}^1,R_\alpha)$ 与习题 39 中的系统 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},T_\alpha)$ 是共轭的.

例子3.12.

设 α 为一实数. 则映射 $\phi:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$, $z\mapsto z^2$ 是从 $(\mathbb{S}^1,R_\alpha)$ 到 $(\mathbb{S}^1,R_{2\alpha})$ 的半共轭.

例子3.13.

例子 2.29 中的系统是习题 29 中符号系统 (Σ_2^+,σ) 的因子.

命题3.42.

设 ϕ 是从 (X,f) 到 (Y,g) 的半共轭. 若 x 是 (X,f) 周期点 (相应地, 回复点), 则 $\phi(x)$ 为 (Y,g) 的周期点 (相应地, 回复点).

命题3.43.

设 ϕ 是从 (X,f) 到 (Y,g) 的半共轭. 若 x 是 (X,f) 传递点, 则 $\phi(x)$ 为 (Y,g) 传递点.

推论3.44.

设 (Y,g) 是 (X,f) 的因子系统. 若 (X,f) 是点传递的 (相应地, 极小的), 则 (X,g) 是点传递的 (相应地, 极小的).

习题40.

证明: 系统 (Σ_2^+, σ) 共轭于例 2.30 中 $([0,1], f)$ 的某个子系统.

第 4 章 紧性和分离性

4.1 紧空间

本节中, 我们通过开覆盖给出拓扑空间紧性的定义. 然后讨论紧性对于闭子空间、乘积空间、和连续像下的保持性. 最后，我们从闭集角度给出紧性的刻画.

定义4.1.

设 $\mathcal{A}$ 是集合 X 的一个子集族. 若 $\mathcal{A}$ 中所有元的并等于 X, 则称 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个**覆盖**. 若 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子族并且仍覆盖 X, 则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的**子覆盖**. 若覆盖 $\mathcal{A}$ 中的元素个数有限, 则称 $\mathcal{A}$ 是 X 的**有限覆盖**. 若 X 是拓扑空间并且覆盖 $\mathcal{A}$ 中元都是 X 的开集, 则称 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个**开覆盖**. 若 $Y \subset X$ 并且集族 $\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ 是 Y 的覆盖, 则也称 $\mathcal{A}$ 是 Y 的**覆盖**.

定义4.2.

若拓扑空间 X 的任意开覆盖都存在有限子覆盖, 则称 X 是**紧空间**, 或称 X 是**紧**的.

定义4.3.

对于拓扑空间的某种性质, 若任何两个同胚的空间一定同时具有该性质或同时不具有该性质, 则称这种性质是**拓扑性质**或**同胚不变的**.

习题41.

证明: 紧性是拓扑性质.

例子4.1.

有限集在任何拓扑下都是紧的.

例子4.2.

$\mathbb{E}^1$ 的子空间 $\{0\} \cup \{1/n : n = 1, 2, 3, ...\}$ 是紧的.

例子4.3.

闭区间 $[0, 1]$ 是紧的.

证明.

任给 $[0,1]$ 的开覆盖 $\mathcal{A}$. 考虑 $B=\{t: t\in[0,1]$ 且 $[0,t]$ 能被 $\mathcal{A}$ 中有限个元覆盖$\}$. 令 $s=\sup B$. 显然 $s>0$. 若 $s\in(0,1)$, 则存在 $U\in\mathcal{A}$ 及 $0<\alpha<s<\beta<1$ 使得 $[\alpha,\beta]\subset U$. 这样, $[0,\alpha]$ 可被 $\mathcal{A}$ 的一个有限子族 $\mathcal{B}$ 覆盖. 于是, $\mathcal{B}\cup\{U\}$ 构成 $[0,\beta]$ 的有限覆盖. 这与 s 的定义相矛盾. 所以, $s=1$. 取 $V\in\mathcal{A}$ 及 $\delta'>0$, 使得 $[1-\delta',1]\subset V$. 设 $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ 为 $[0,1-\delta']$ 的一个有限覆盖. 则 $\mathcal{C}\cup\{V\}\subset\mathcal{A}$ 且构成 $[0,1]$ 的有限覆盖. 所以, $[0,1]$ 是紧的. □

例子4.4.

半开区间 $[0,1)$ 不是紧的.

证明.

考虑 $[0,1)$ 的开覆盖 $\mathcal{A}=\{[0,1-\frac{1}{n}):n=2,3,\cdots\}$. 易见 $\mathcal{A}$ 没有有限子覆盖. 所以, $[0,1)$ 不是紧的. □

例子4.5.

$\mathbb{R}^n\ (n\geq 1)$ 不是紧的.

证明.

考虑开集族 $\mathcal{A}=\{B(0,r):r>0\}$. 则 $\mathcal{A}$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个开覆盖, 但无有限子覆盖. 所以, $\mathbb{R}^n$ 不是紧的. □

习题42.

证明: $[0,1]$ 与 $[0,1)$ 不同胚.

引理4.4.

设 Y 是拓扑空间 X 的子空间. 如果对 Y 的由 X 中开集构成的任意覆盖 $\mathcal{A}$, 都存在覆盖 Y 的有限子族 $\mathcal{B}$, 则 Y 是紧的.

证明.

设 $\mathcal{U}$ 是 Y 的任一开覆盖. 则对每个 $U\in\mathcal{U}$, 存在 X 的开集 $\widetilde{U}$ 满足 $\widetilde{U}\cap Y=U$. 这样, X

的开集族 $\mathcal{A} := \{\widetilde{U} : U \in \mathcal{U}\}$ 覆盖了 Y. 于是, 存在 $\mathcal{A}$ 的覆盖 Y 的一个有限子族 $\mathcal{B}$. 令 $\mathcal{C} = \{V \cap Y : V \in \mathcal{B}\}$. 则 $\mathcal{C}$ 构成 $\mathcal{U}$ 的一个有限子覆盖. 所以, Y 是紧的. □

命题4.5.

紧空间的闭子空间是紧的.

证明.

设 X 是紧空间,Y 是 X 的闭子空间. 任给 X 的覆盖 Y 的开集族 $\mathcal{A}$. 则 $\mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}$ 构成 X 的开覆盖. 而X是紧的, 所以存在 $\mathcal{A} \cup \{X \setminus Y\}$ 的覆盖 X 的有限子族 $\mathcal{B}$. 这样, 有限族 $\mathcal{B} \setminus \{X \setminus Y\} \subset \mathcal{A}$ 且覆盖了 Y. 由引理 4.4 知 Y 是紧的. □

下面我们将证明两个紧空间的乘积空间还是紧的. 为此, 我们先证明一个引理.

引理4.6 (管状邻域引理).

设 X 是拓扑空间,Y 是紧空间,$\mathcal{A}$ 是 $X \times Y$ 的开覆盖. 则对每个 $x \in X$, 都存在 x 的开邻域 Z_x 使得 $Z_x \times Y$ 能被 $\mathcal{A}$ 的某个有限子族所覆盖.

证明.

设 $x \in X$. 因 $\{x\} \times Y$ 与 Y 同胚, 所以 $\{x\} \times Y$ 是紧的. 对每个 $y \in Y$, 存在 $W_y \in \mathcal{A}$ 使得 $(x, y) \in W_y$. 于是, 存在 X 的开集 U_y 和 Y 的开集 V_y, 使得 $(x, y) \in U_y \times V_y \subset W_y$. 由 $\{x\} \times Y$ 的紧性, 存在有限个 $y_1, \cdots, y_n \in Y$ 使得 $\{U_{y_1} \times V_{y_1}, \cdots, U_{y_n} \times V_{y_n}\}$ 覆盖了 $\{x\} \times Y$. 令 $Z_x = \cap_{i=1}^n U_{y_i}$. 则 Z_x 即为所求. □

命题4.7.

若 X 和 Y 是紧空间, 则 $X \times Y$ 是紧的.

证明.

设 $\mathcal{A}$ 是 $X \times Y$ 的开覆盖. 由引理 4.6, 对每个 $x \in X$, 存在开邻域 Z_x 使得 $Z_x \times Y$ 能被 $\mathcal{A}$ 中有限个元所覆盖. 这样, $\{Z_x : x \in X\}$ 构成了 X 的开覆盖. 而 X 是紧的, 所以存在有限个 $x_1, \cdots, x_m \in X$ 使得 $\{Z_{x_i} : i = 1, \cdots, m\}$ 覆盖了 X. 于是, $\{Z_{x_i} \times Y : i = 1, \cdots, m\}$ 覆盖了 $X \times Y$. 这样, $X \times Y$ 可被 $\mathcal{A}$ 中有限个元覆盖. 因此, $X \times Y$ 是紧的. □

应用归纳法, 可见命题4.7对有限个紧空间的乘积仍然成立. 事实上, 我们将在本章第5节证明任意个紧空间的乘积仍是紧的.

命题4.8.

设 $f : X \to Y$ 是连续的. 若 X 是紧的, 则 $f(X)$ 作为 Y 的子空间是紧的. 特别地, 若 f 是满射, 则 Y 是紧的.

证明.

设 $\mathcal{A}$ 是 Y 的覆盖 $f(X)$ 的开集族. 则 $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{A}\}$ 构成 X 的开覆盖. 由 X 的紧性, 存在有限个 $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{A}$, 使得 $\{f^{-1}(U_i) : i = 1, \cdots, n\}$ 覆盖 X. 于是, $\{U_i : i = 1, \cdots, n\}$ 覆盖了 $f(X)$. 根据命题4.4, 我们知道 $f(X)$ 是紧的. □

定义4.9.

设 $\mathcal{F}$ 是集合 X 的一个子集族. 如果对 $\mathcal{F}$ 的任一有限子族 $\{F_1, ..., F_n\}$, 都有 $\cap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$, 则称 $\mathcal{F}$ 具有**有限交性质**.

命题4.10.

拓扑空间 X 是紧的当且仅当 X 的每个具有有限交性质的闭集族 $\mathcal{F}$, 其所有元的交 $\cap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset$.

证明.

$(\Longrightarrow)$ 设 X 是紧的, $\mathcal{F}$ 是 X 的有有限交性质的闭集族. 假设 $\cap_{A\in\mathcal{F}} A = \emptyset$. 则 $\cup_{A\in\mathcal{F}}(X \setminus A) = X$, 即 $\{X \setminus A : A \in \mathcal{F}\}$ 构成 X 的开覆盖. 由 X 的紧性, 存在有限个 $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ 使得 $\cup_{i=1}^n (X \setminus A_i) = X$. 这样, $\cap_{i=1}^n A_i = \emptyset$. 这与 $\mathcal{F}$ 的有限交性质相矛盾.

$(\Longleftarrow)$ 假设 X 非紧. 则存在 X 的一个开覆盖 $\mathcal{U}$, 其没有有限子覆盖. 这样, $\mathcal{F} := \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ 是具有有限交性质的闭集族. 所以, $\cap_{A\in\mathcal{F}} A \neq \emptyset$, 即 $\cup_{A\in\mathcal{F}}(X \setminus A) \neq X$. 这与 $\mathcal{U}$ 是开覆盖相矛盾. □

习题43.

请构造 $\mathbb{R}$ 的闭集族 $\mathcal{F}$, 其满足有限交性质, 但 $\cap \mathcal{F} = \emptyset$.

4.2 紧空间中的分离性

本节中，我们将给出 Hausdorff 性、正则性、和正规性等几种分离性的定义和例子，并讨论这些分离性对于子空间、乘积空间、和连续像下的保持性. 我们还会证明紧 Hausdorff 空间和度量空间的正规性.

定义4.11.

若对拓扑空间 X 的任意两点 $x \neq y$, 都存在不交的开集 U 和 V, 使得 $x \in U$ 且 $y \in V$, 则称 X 是 Hausdorff **空间**.

例子4.6.

度量空间是 Hausdorff 的.

例子4.7.

任何无限集关于其上的余有限拓扑都不是 Hausdorff 的.

习题44.

证明: Hausdorff 空间是单点闭的, 即其中每个点都是闭集.

命题4.12.

Hausdorff 空间的子空间是 Hausdorff 的.

证明.

设 X 是 Hausdorff 空间, Y 是 X 的子空间. 任给 $x \neq y \in Y$. 由 X 的 Hausdorff 性, 存在 X 的不交开集 U, V, 使得 $x \in U, y \in V$. 设 $\widetilde{U} = U \cap Y$, $\widetilde{V} = V \cap Y$. 则 $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ 是 Y 的不交开集, 且 $x \in \widetilde{U}, y \in \widetilde{V}$. □

命题4.13.

Hausdorff 空间的乘积空间是 Hausdorff 的.

证明.

设 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族 Hausdorff 空间. 任给 $(x_\lambda) \neq (y_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. 则存在 $\lambda_0 \in \Lambda$, 使

得 $x_{\lambda_0} \neq y_{\lambda_0}$. 由 X_{λ_0} 的 Hausdorff性, 存在 X_{λ_0} 的不交开集 U, V, 使得 $x_{\lambda_0} \in U, y_{\lambda_0} \in V$. 设 $p_{\lambda_0} : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_{\lambda_0}$ 是向 λ_0 分量的投影. 则 $p_{\lambda_0}^{-1}(U)$ 和 $p_{\lambda_0}^{-1}(V)$ 是 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 的两个不交开集, 并且 $(x_\lambda) \in p_{\lambda_0}^{-1}(U)$, $(y_\lambda) \in p_{\lambda_0}^{-1}(V)$. 所以, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 是Hausdorff的. □

习题45.

请举例说明 Hausdorff 空间的连续像可以不是 Hausdorff 的.

引理4.14.

设 X 是 Hausdorff 空间, A 是 X 的紧子集, $x \notin A$. 则存在不交的开集 U, V 使得 $x \in U, A \subset V$.

证明.

因 X 是 Hausdorff 的, 所以对每个 $y \in A$, 存在不交的开集 U_y, V_y使得 $x \in U_y$ 且 $y \in V_y$. 这样, $\{V_y : y \in A\}$ 构成 A 的开覆盖. 由 A 的紧性, 存在有限个 $y_1, \cdots, y_n \in Y$ 使得 $A \subset \cup_{i=1}^n V_{y_i}$. 令 $U = \cap_{i=1}^n U_{y_i}$ 及 $V = \cup_{i=1}^n V_{y_i}$. 则 $x \in U$, $A \subset V$, 且 $U \cap V = \emptyset$. □

命题4.15.

Hausdorff 空间中的紧集是闭的.

证明.

设 X 是 Hausdorff 空间, A 是 X 的紧子集, $x \in X \setminus A$. 由引理4.14, 存在 X 的不交开集 U, V 使得 $x \in U$ 且 $A \subset V$. 这蕴含 $U \subset X \setminus A$. 所以, $X \setminus A$ 是开的, 即 A 是闭的. □

定义4.16.

*设 X 是单点闭空间. 如果对于 X 中任意点 x 及任意不包含 x 的闭集 A, 都存在不交的开集 U 和 V 使得 $x \in U$ 且 $A \subset V$, 则称 X 是***正则空间***. 若对 X 的任意两个不交闭集 A, B 都存在不交的开集 U, V, 使得 $A \subset U, B \subset V$, 则称 X 是***正规空间***.*

从定义可见, 正规空间是正则的, 正则空间是Hausdorff的.

命题4.17.

紧 Hausdorff 空间是正规的.

证明.

设 A 和 B 是 X 的两个不交闭集. 由引理 4.5 知 A 和 B 是紧集. 由引理 4.14, 对每个 $x \in A$, 存在不交开集 U_x 和 V_x 使得 $x \in U_x$ 且 $B \subset V_x$. 这样, $\{U_x : x \in A\}$ 构成 A 的开覆盖. 由 A 的紧性, 存在有限个 $x_1, \cdots, x_n \in A$ 使得 $A \subset \cup_{i=1}^n U_{x_i}$. 令 $V = \cap_{i=1}^n V_{x_i}$; 则 $A \subset U$, $B \subset V$, 且 $U \cap V = \emptyset$. 所以, X 是正规的. □

命题4.18.

设 X 是紧的, Y 是紧 Hausdorff 的, $f : X \to Y$ 是一一的连续映射; 则 f 是同胚.

证明.

由命题 2.44, 只要证明 f 是闭映射. 设 A 是 X 的闭集. 因 X 是紧的, 所以 A 是紧的. 这样由 f 的连续性知 $f(A)$ 是 Y 的紧子集. 而 Y 是Hausdorff的, 所以 $f(A)$ 是 Y 的闭集. □

习题46.

设 $X = [0, 1]$, $R = \{(x, y) : x = y; 或\ x = 0, y = 1; 或\ x = 1, y = 0\}$. 则 R 是 X 上的等价关系, 且 $X/R \cong \mathbb{S}^1$.

证明.

考虑映射 $f : [0, 1] \to \mathbb{S}^1, x \mapsto e^{2\pi \mathrm{i} x}$. 证明 f 是闭映射并应用命题 3.39. □

4.3 度量空间中的紧性和分离性

本节中, 我们将给出度量空间中紧集的刻画, 并证明度量空间的正规性.

定义4.19.

设 (X, d) 是一度量空间, $A \subset X$. 我们称 $\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ 为集合 A 的**直径**, 并记作 $\mathrm{diam}(A)$. 若 $\mathrm{diam}(A) < \infty$, 则称 A 是**有界**的.

定义4.20.

设 (x_n) 是度量空间 (X, d) 中的点列. 若 $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ 为单调增加的正整数列, 则由 $y_i = x_{n_i}$ 所定义的的序列 (y_i) 称为 (x_n) 的**一个子列**; 记作 (x_{n_i}).

定义4.21.

设 (X,d) 是度量空间. 若 X 中每个点列都存在收敛的子列, 则称 X 是**列紧**的.

命题4.22 (勒贝格数引理).

设 (X,d) 是列紧的度量空间, $\mathcal{A}$ 是 X 的一个开覆盖; 则存在 $\delta>0$, 使得 X 的每个直径小于 δ 的子集都含于 $\mathcal{A}$ 的某个元中.

证明. 假设结论不成立; 则对每个正整数 n, 都存在 X 的直径小于 $1/n$ 的子集 A_n, 使得 A_n 不含于 $\mathcal{A}$ 的任何元中. 任取 $x_n\in A_n$. 由 X 的列紧性, 存在 (x_n) 的子列 (x_{n_i}) 及 $z\in X$ 使得 $x_{n_i}\to z$. 因 $\mathcal{A}$ 是 X 的开覆盖, 所以存在开集 $U\in\mathcal{A}$ 使得 $z\in U$. 取 $\epsilon>0$ 使得 $B(z,\epsilon)\subset U$. 则当 i 充分大以后, 有 $d(x_{n_i},z)<\epsilon/2$ 且 $\operatorname{diam}(A_{n_i})<\epsilon/2$; 于是, $A_{n_i}\subset B(z,\epsilon)\subset U$. 这与 A_n 的定义相矛盾. □

我们称命题 4.22 中的 δ 为 X 关于开覆盖 $\mathcal{A}$ 的**勒贝格数**.

命题4.23.

设 (X,d) 是度量空间; 则 X 是紧的, 当且仅当 X 是列紧的.

证明.

$(\Longrightarrow)$ 设 X 是紧的. 任给 X 的点列 (x_n). 我们将归纳地构造 (x_n) 的一个收敛子列. 设 $X_1=X$; 考虑 X_1 的开覆盖 $\mathcal{A}_1:=\{B(x,1):x\in X_1\}$. 由 X_1 的紧性, 存在有限个 X_1 中的点 $x_{1,1},\cdots,x_{1,n_1}$ 使得 $X_1=\cup_{i=1}^{n_1}B(x_{1,i},1)$. 这样, 一定有某个指标 $k_1\in\{1,\cdots,n_1\}$ 使得对无限个指标 n 成立: $x_n\in B(x_{1,k_1},1)$; 任取 $x_{n_1}\in B(x_{1,k_1},1)\cap\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

假设对正整数 m 及所有 $1\le i\le m$, 满足如下条件的 n_i, x_{n_i}, 及 x_{i,k_i} 已定义:

(1) $n_1<n_2<\cdots<n_m$;

(2) $x_{n_i}\in B(x_{i,k_i},\frac{1}{i})\cap\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$;

(3) 存在无限个 n 使得 $x_n\in B(x_{i,k_i},\frac{1}{i})$.

令 $X_{m+1}=\overline{B(x_{m,k_m},1/m)}$; 则由命题 4.5 知 X_{m+1} 是紧的. 考虑 X_{m+1} 的开覆盖 $\mathcal{A}_2:=\{B(x,1/(m+1)):x\in X_{m+1}\}$. 由 X_{m+1} 的紧性, 存在 $x_{m+1,1},\cdots,x_{m+1,n_{m+1}}\in$

X_{m+1}, 使得集族 $\{B(x_{m+1,i}, 1/(m+1)) : 1 = 1, \cdots, n_{m+1}\}$ 覆盖了 X_{m+1}. 于是, 存在某个指标 $k_{m+1} \in \{1, \cdots, n_{m+1}\}$ 使得对无限个指标 n 成立: $x_n \in B(x_{m+1,k_{m+1}}, 1/(m+1))$. 任取 $n_{m+1} > n_m$ 使得 $x_{n_{m+1}} \in B(x_{m+1,k_{m+1}}, 1/(m+1)) \cap \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

这样我们便得到 (x_n) 的子列 (x_{n_i}). 从上面的构造过程可见 $X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ 且 $\mathrm{diam}(X_i) \to 0$. 根据有限交性质, 存在 $z \in X$ 使得 $\{z\} = \cap_{i=1}^{\infty} X_i$. 再根据上述构造过程, 得 $x_{n_i} \to z$.

$(\Longleftarrow)$ 假设 X 是列紧的但不是紧的; 则存在 X 的开覆盖 $\mathcal{A}$, 其无有限子覆盖. 设 δ 为 X 关于覆盖 $\mathcal{A}$ 的勒贝格数. 考虑 X 的开覆盖 $\mathcal{B} := \{B(x, \delta/3) : x \in X\}$. 因$\mathrm{diam}(B(x, \delta/3)) < \delta$, 根据勒贝格数引理, 可知$\mathcal{B}$也没有有限子覆盖. 我们归纳地定义一个点列$(x_n)$: 任取$x_1 \in X$. 因 $\mathcal{B}$ 没有有限子覆盖, 所以存在 $x_2 \notin B(x_1, \delta/3)$. 假设对正整数 $m \geq 2$ 及$1 \leq i \leq m$, x_i 已定义. 再根据 $\mathcal{B}$ 没有有限子覆盖这个条件, 知存在 $x_{m+1} \notin \cup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta/3)$. 这样我们得到点列 (x_n). 从 x_n 的定义可见, $d(x_i, x_j) > \delta/3\,(\forall i \neq j)$. 这蕴含 (x_n) 无收敛子列. □

定义4.24.

设 (X, d) 是度量空间. 若对每个 $\epsilon > 0$, 都存在有限个 ϵ 为半径的开球覆盖 X, 则称 X 是**完全有界**的.

显然，完全有界的度量空间是有界的.

定义4.25.

设 (x_n) 是度量空间 (X, d) 中的点列. 如果对每个 $\epsilon > 0$, 都存在 $N > 0$, 使得当 $n, m > N$ 时, $d(x_n, x_m) < \epsilon$, 则称 (x_n) 是**柯西列**.

定义4.26.

如果度量空间 (X, d) 中每个柯西列都收敛, 则称 X 是**完备**的.

命题4.27.

设 (X, d) 是度量空间. 则 X 是紧的, 当且仅当它是完备的和完全有界的.

证明.

($\Longrightarrow$) 设 X 是紧的. 任给 X 中柯西列 (x_n). 由命题4.23知, 存在 $z \in X$ 及 (x_n) 的子列 (x_{n_i}) 使得 $x_{n_i} \to z$. 再由柯西列的定义, 可以证明 $x_n \to z$. 所以, X 是完备的. 由紧性的定义直接得到 X 的完全有界性.

($\Longleftarrow$) 设 X 是完备的和完全有界的. 由命题4.23, 为证 X 是紧的, 只需要证其为列紧的. 为此, 设 (x_n) 是 X 中任一点列. 利用 X 的完全有界性, 类似于命题4.23中 "$\Longrightarrow$" 部分的证明过程, 我们可以构造 (x_n) 的一个子列 (x_{n_i}); 从构造过程可见 (x_{n_i}) 是柯西列. 而 X 是完备的, 故 (x_{n_i}) 收敛. 这样, X 的列紧性得证. □

命题4.28.

欧氏空间的一个子集是紧的当且仅当它是有界闭的.

证明.

($\Longrightarrow$)设 K 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{E}^n$ 中的一个紧集. 由命题4.14知 K 是闭集; 由命题4.27知 K 是完全有界的, 从而是有界的.

($\Longleftarrow$) 设 K 是 $\mathbb{E}^n$ 中的有界闭集. 则存在 $r > 0$ 使得 $K \subset [-r, r]^n$. 而 $[-r, r]^n$ 是紧的, 由命题4.5知 K 是紧的. □

习题47.

设 X 是 Hilbert 空间; 则 X 是有限维的当且仅当 X 的单位闭球是紧的.

命题4.29.

紧空间上的实值连续函数必能取到最大值和最小值.

证明.

设 X 是紧空间, $f : X \to \mathbb{R}$ 是连续函数. 则 $f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 的紧子集. 由命题4.28知 $f(X)$ 是有界闭集. 令 $m = \sup(f(X))$. 则 $m < \infty$ 且 $m \in \overline{f(X)} = f(X)$. 于是, 存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = m$. 所以, f 能够取到最大值 m. 同理可证 f 能够取到最小值. □

定义4.30.

设 $f : X \to Y$ 是从度量空间 (X, d) 到度量空间 (Y, ρ) 的连续映射. 如果对每个 $\epsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$, 使得当 $d(x, y) < \delta$ 时, 成立 $\rho(f(x), f(y)) < \epsilon$, 则称映射 f 是**一致连续**的.

命题4.31.

设 $f : X \to Y$ 是从度量空间 (X, d) 到度量空间 (Y, ρ) 的连续映射. 若 X 是紧的, 则 f 是一致连续的.

证明.

任给 $\epsilon > 0$. 由 f 的连续性, 对每个 $x \in X$, 存在 $r_x > 0$ 使得 $f(B(x, r_x)) \subset B(f(x), \epsilon/2)$. 考虑 X 的开覆盖 $\mathcal{A} = \{B(x, r_x) : x \in X\}$. 设 δ 为 $\mathcal{A}$ 的勒贝格数. 则当 $d(x, y) < \delta$ 时, 必存在 $z \in X$ 使得 $\{x, y\} \subset B(z, r_z)$. 于是, $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(z)) + \rho(f(z), f(y)) < \epsilon$. □

定义4.32.

设 (X, d) 是一度量空间, A, B 是 X 的非空子集. 令 $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$. 我们称 $d(A, B)$ 为集合 A 和 B 的**距离**. 特别地, 当 $A = \{x\}$ 为一个点时, 我们记 $d(x, B) := d(A, B)$.

习题48.

$d(x, A) = 0$ 当且仅当 $x \in \overline{A}$.

命题4.33.

度量空间是正规的.

证明.

设 (X, d) 是度量空间, A 和 B 是 X 的不交闭集. 因 X 是 Hausdorff 的, 故 X 是单点闭的. 对每个 $x \in A$, 令 $r_x = d(x, B)/2$. 因 B 是闭集且 $x \notin B$, 由习题48 知 $r_x > 0$. 对每个 $y \in B$, 令 $s_y = d(y, A)/2$. 同样, 我们有 $s_y > 0$. 设 $U = \cup_{x \in X} B(x, r_x)$, $V = \cup_{y \in Y} B(y, s_y)$. 则 U, V 是开集且 $A \subset U, B \subset V$. 下证 $U \cap V = \emptyset$. 否则, 存在 $a \in X$

及 $b \in Y$ 使得 $B(a, r_a) \cap B(b, s_b) \neq \emptyset$. 任取 $c \in B(a, r_a) \cap B(b, s_b)$. 不妨假设 $r_a \geq s_b$. 则 $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) < 2r_a = d(a, B)$. 这导致矛盾. □

习题49.

设 (X, d) 是一度量空间, $A \subset X$. 证明: 映射 $f : X \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$ 是连续的.

习题50.

设 (X, d) 是一度量空间, A 和 B 是 X 中两个不交闭集. 请构造一个连续映射 $g : X \to \mathbb{R}$ 使得 $g(A) = 0$ 且 $g(B) = 1$, 并用此说明度量空间是正规的.

4.4 Zorn引理

本节中, 我们将给出偏序集和全序集的定义, 并叙述 Zorn 引理.

定义4.34.

设 X 是一集合, R 是 $X \times X$ 的一个子集. 如果 R 满足以下条件:

(1) 对每个 $x \in X$, 有 $(x, x) \in R$,

(2) $(x, y) \in R$ 且 $(y, x) \in R$ 蕴含 $x = y$,

(3) $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$ 蕴含 $(x, z) \in R$,

则称 R 是集合 X 上的一个**偏序关系**, 称 X 为(带有偏序关系R的) **偏序集**.

习惯上, 我们用符号 $\preceq$ 表示一个偏序关系, 用 $x \preceq y$ 表示 $(x, y) \in \preceq$. 今后, 我们也将 $x \preceq y$ 记作 $y \succeq x$.

例子4.8.

设$\mathcal{B}$ 是集合 X 的一个子集族. 对任意$\mathcal{B}$ 中的元C 和D, 定义 $C \preceq D$ 当且仅当 $C \subset D$; 则 $\preceq$为$\mathcal{B}$ 上的一个偏序关系.

定义4.35.

设 $\preceq$ 是集合 X 上一个偏序关系. 如果对任意 $x, y \in X$ 都有 $x \preceq y$ 或 $y \preceq x$, 则称 $\preceq$ 是 X 上的**全序关系**, 称 X 为 (带有全序关系 $\preceq$ 的) **全序集**.

例子4.9.

对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 定义 $x \preceq y$ 当且仅当 $x \leq y$; 则 $\preceq$ 为 $\mathbb{R}$ 上的一个全序关系.

若 $\preceq$ 是集合 X 上的一个偏序关系且 $Y \subset X$, 则 $\preceq$ 自然可视作 Y 上的一个偏序关系. 若 Y 关于 $\preceq$ 构成全序集, 则称 Y 是 X 的**全序子集**.

定义4.36.

设 $\preceq$ 是集合 X 上一个偏序关系, $Y \subset X$. 若存在 $z \in X$ 使得对每个 $x \in Y$ 有 $x \preceq z$, 则称 z 是集合 Y 的一个**上界**.

定义4.37.

设 $\preceq$ 是集合 X 上一个偏序关系, $z \in X$. 如果对每个 $x \in X$, $z \preceq x$ 都蕴含 $z = x$, 则称 z 是 X 中的一个**极大元**.

公理1 (Zorn 引理).

设 X 是一非空偏序集. 若 X 的每个全序子集都有上界, 则 X 存在极大元.

今后, Zorn 引理要当作公理使用——虽然它的论断看上去不那么显然, 但可以证明它与下面"非常显然的"选择公理等价.

公理2 (选择公理).

设 $\mathcal{A}$ 为非空集合构成的一个集族. 则存在映射 $c : \mathcal{A} \to \cup_{A \in \mathcal{A}} A$ 使得对每个 $A \in \mathcal{A}$ 有 $c(A) \in A$.

4.5 Tychonoff 定理

本节中, 我们将利用 Zorn 引理证明: 任意个紧空间的乘积空间还是紧的.

引理4.38.

设 X 是一个集合, $\mathcal{A}$ 是 X 的具有有限交性质的子集族; 则一定存在一个集合包含关系下极大的包含 $\mathcal{A}$ 的具有有限交性质的 X 的子集族.

证明.

设 $\mathbb{P} = \{\mathcal{B} \subset 2^X : \mathcal{A} \subset \mathcal{B}, \text{且}\, \mathcal{B}\,\text{具有有限交性质}\}$; 则 $\mathbb{P}$ 在集族包含关系下成为偏序集. 因 $\mathcal{A} \in \mathbb{P}$, 故 $\mathbb{P} \neq \emptyset$. 设 $\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\mathbb{P}$ 的任一全序子集. 令 $\mathcal{C} = \cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda$. 显然, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. 任取 $\mathcal{C}$ 中有限个元 $C_1, \cdots, C_n$; 设 $C_i \in \mathcal{B}_{\lambda_i}, i = 1, \cdots, n$. 由 $\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的全序性, 我们不妨假设 $\mathcal{B}_{\lambda_1} \subset \cdots \subset \mathcal{B}_{\lambda_n}$; 这样 $\{C_1, \cdots, C_n\} \subset \mathcal{B}_{\lambda_n}$. 而 $\mathcal{B}_{\lambda_n}$ 有有限交性质, 故 $\cap_{i=1}^n C_i \neq \emptyset$. 所以 $\mathcal{C}$ 具有有限交性质. 于是 $\mathcal{C} \in \mathbb{P}$. 从 $\mathcal{C}$ 定义可见其为 $\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的一个上界. 根据 Zorn 引理, $\mathbb{P}$ 有极大元. □

引理4.39.

设 X 是一个集合. 若 $\mathcal{D}$ 是 X 的具有有限交性质的集族包含关系下的极大子集族, 则

(1) $\mathcal{D}$ 中元素的任意有限交仍属于 $\mathcal{D}$;

(2) 若 A 是 X 的一个子集并且与 $\mathcal{D}$ 中每个元都相交, 则 A 属于 $\mathcal{D}$.

证明.

(1) 设 $\mathcal{A} = \{A : A\,\text{是}\,\mathcal{D}\,\text{中有限个元素的交}\}$. 因 $\mathcal{D}$ 有有限交性质, 易见 $\mathcal{A}$ 也有有限交性质. 再由 $\mathcal{D}$ 的极大性, 得 $\mathcal{A} = \mathcal{D}$.

(2) 考虑集族 $\mathcal{D} \cup \{A\}$. 任取 $\mathcal{D}$ 中有限个元 $B_1, \cdots, B_n$. 由(1)得 $\cap_{i=1}^n B_i \in \mathcal{D}$. 因 A 与 $\mathcal{D}$ 中每个元都相交, 故 $\cap_{i=1}^n B_i \cap A \neq \emptyset$. 所以 $\mathcal{D} \cup \{A\}$ 有有限交性质. 根据 $\mathcal{D}$ 的极大性, 有 $\mathcal{D} \cup \{A\} = \mathcal{D}$. 所以, $A \in \mathcal{D}$. □

定理4.40 (Tychonoff 定理).

任意个紧空间的乘积仍是紧的.

证明. 设 $X = \prod_{a\in J} X_a$, 其中每个 X_a 都是紧的. 设 $\mathcal{A}$ 为 X 的具有有限交性质的闭集族. 下证 $\cap\mathcal{A} \neq \emptyset$. 由引理4.38, 可取 X 的包含 $\mathcal{A}$ 的具有有限交性质的极大子集族 $\mathcal{D}$. 对 $a \in J$, 令 $p_a : X \to X_a$ 为自然的投射; 则集族 $\{p_a(D) : D \in \mathcal{D}\}$ 具有有限交性质. 由 X_a 的紧性, $\cap_{D\in\mathcal{D}}\overline{p_a(D)} \neq \emptyset$. 取 $x_a \in \cap_{D\in\mathcal{D}}\overline{p_a(D)}$; 则对 x_a 的每个开邻域 U_a 和每个 $D \in \mathcal{D}$, 有 $U_a \cap p_a(D) \neq \emptyset$, 即 $p_a^{-1}(U_a) \cap D \neq \emptyset$. 根据命题4.39(2), 得 $p_a^{-1}(U_a) \in \mathcal{D}$. 再由命题4.39(1)

知, 对任意有限个$a_1, \cdots, a_n \in J$有$\cap_{i=1}^n p_{a_i}^{-1}(U_{a_i}) \in \mathcal{D}$, 其中$U_{a_i}$是$X_{a_i}$的任意开集. 而$\mathcal{D}$具有有限交性质, 所以对每个$D \in \mathcal{D}$有$\cap_{i=1}^n p_{a_i}^{-1}(U_{a_i}) \cap D \neq \emptyset$; 这蕴含$(x_a) \in \overline{D}$. 于是, $(x_a) \in \cap_{D\in\mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset$; 特别地, $\cap\mathcal{A} \neq \emptyset$. □

例子4.10.

章节 3.4 中的符号空间 $\{1, ..., k\}^{\mathbb{Z}_+}$ 是紧的.

4.6 极小集和 Birkhoff 回复定理*

本节中, 我们将给出极小系统和极小集的定义, 并用 Zorn 引理证明: 若相空间是紧的, 则系统总存在极小集.

定义4.41.

设 (X, f) 是一动力系统, $A \subset X$. 如果 $f(A) \subset A$, 则称 A 是 f-**不变**的; 如果 X 没有非空 f-不变真闭子集, 则称 (X, f) 是**极小**的.

命题4.42.

对每个 $x \in X$, 轨道闭包 $\overline{\mathcal{O}(x, f)}$ 都是闭不变集.

证明.

由 f 的连续性, 我们有 $f(\overline{\mathcal{O}(x, f)}) \subset \overline{f(\mathcal{O}(x, f))} \subset \overline{\mathcal{O}(x, f)}$. □

命题4.43.

动力系统 (X, f) 是极小的当且仅当对每个点 $x \in X$ 都有 $\overline{\mathcal{O}(x, f)} = X$.

证明.

$(\Longrightarrow)$ 设 $x \in X$. 由命题 4.42 和极小性的定义, 知 $\overline{\mathcal{O}(x, f)} = X$.

$(\Longleftarrow)$ 假设 (X, f) 不是极小的; 则存在 X 的非空 f-不变真闭子集 A. 任取 $x \in A$; 则 $\mathcal{O}(x, f) \subset A$, 进而 $\overline{\mathcal{O}(x, f)} \subset A$. 这与 $\overline{\mathcal{O}(x, f)} = X$ 相矛盾. □

例子4.11.

例 2.24 中, 若 α 是无理数, 则 $(\mathbb{S}^1, R_\alpha)$ 是极小的.

定义4.44.

设 K 是 X 的 f-不变非空闭子集. 如果子系统 $(K, f|_K)$ 本身是极小的, 则称 K 为 (X, f) 的**极小集**.

命题4.45.

若 X 是紧的, 则 (X, f) 一定有极小集.

证明.

设 $\mathcal{A} = \{A \subset X : A$是$f$-不变闭集$\}$. 因 $X \in \mathcal{A}$, 故 $\mathcal{A} \neq \emptyset$. 定义 $\mathcal{A}$ 上的偏序关系 $\preceq$: $A \preceq B$ 当且仅当 $A \supset B$. 若 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathcal{A}$ 的任一全序子集, 则它满足有限交性质; 而 X 是紧的, 故 $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$. 又 $f(\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \subset \cap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) \subset \cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, 故 $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 是非空 f-不变闭集. 这样, $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$是$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的一个上界. 根据 Zorn 引理, $\mathcal{A}$ 含一个极大元 M; 则 M 为一个极小集. □

例子4.12.

设 (X, f) 为一动力系统, 其中 X 是单点闭的. 若 $x \in X$ 是周期点, 则 $\mathcal{O}(x, f)$ 是极小集.

习题51.

设 M 是系统 (X, f) 的一个极小集. 若 x 是 M 的一个孤立点 (相对于子空间拓扑), 则 x 是周期的.

定理4.46 (Birkhoff 回复定理).

设 X 是紧的, 映射$f : X \to X$ 是连续的; 则系统 (X, f) 一定有回复点.

证明.

设 M 是 (X, f) 的一个极小集. 取定 $x \in M$. 我们将证明 x 是回复点. 否者, 存在 x 的开邻域U, 使得对每个正整数 n 有 $f^n(x) \notin U$. 这样 $\overline{\mathcal{O}(f(x), f)} \cap U = \emptyset$. 这与命题 4.43 矛盾. □

4.7 几乎周期点*

本节中, 我们将用回复时间集的组合性质来刻画轨道闭包的极小性.

定义4.47.

设 A 是正整数集的一个子集. 如果存在正整数 l 使得对任意正整数 n 成立 $A\cap\{n,n+1,...,n+l\}\neq\emptyset$, 则称 A 是 syndetic **集**.

定义4.48.

设 (X,f) 是一动力系统, $x\in X$. 如果对 x 的每个邻域 U, 回复时间集 $\{n:f^n(x)\in U\}$ 都是 syndetic 的, 则称 x 是**几乎周期点**.

命题4.49.

设 (X,f) 是一动力系统且 X 是紧 Hausdorff 空间; 则 $x\in X$ 是几乎周期的当且仅当 $\overline{\mathcal{O}(x,f)}$ 是极小集.

证明.

$(\Longrightarrow)$ 假设 $\overline{\mathcal{O}(x,f)}$ 不是极小的, 则 $\overline{\mathcal{O}(x,f)}$ 真包含一非空闭不变集 M. 由 X 的正规性, 存在不交开集 U,V 使得 $x\in U$ 且 $M\subset V$. 由 f 的连续性, 可知存在正整数列 $n_1<n_2<\cdots$ 及 $1_1<1_2<\cdots$ 使得对每个 i 成立: $\{f^{n_i}(x),f^{n_i+1}(x),\cdots,f^{n_i+l_i}(x)\}\subset V$. 而 x 是几乎周期的, 故 $\{n:f^n(x)\in U\}$ 是 syndetic 的. 于是, $U\cap V\neq\emptyset$. 这与假设矛盾.

$(\Longleftarrow)$ 假设 x 不是几乎周期的. 则存在 x 的开邻域 U 及正整数列 $n_1<n_2<\cdots$ 及 $1_1<1_2<\cdots$ 使得对每个 i 成立 $\{f^{n_i}(x),f^{n_i+1}(x),\cdots,f^{n_i+l_i}(x)\}\subset X\setminus U$. 通过选取子列, 不妨设 $f^{n_i}(x)\to z\in X\setminus U$. 这样, $\overline{\mathcal{O}(z,f)}\subset\overline{\mathcal{O}(x,f)}\setminus U$. 这与 $\overline{\mathcal{O}(x,f)}$ 的极小性相矛盾. □

习题52.

请构造习题 29 中动力系统 $(\{1,...,k\}^{\mathbb{Z}_+},\sigma)$ 的一个非周期的几乎周期点.

4.8 多重 Birkhoff 回复定理和 van der Waerden 定理*

我们将叙述多重 Birkhoff 回复定理, 并用其证明加法组合中的 van der Waerden 定理. 这是动力系统在加法组合中的一个优美的应用.

下面的多重回复定理是 Birkhoff 回复定理的推广, 其证明参见 [6].

定理4.50 (多重 Birkhoff 回复定理).
设 X 是紧度量空间, $f_1, ..., f_n$ 是 X 上两两交换的连续自映射; 则存在点 $x \in X$ 及正整数序列 $n_k \to \infty$ 使得对所有 $i = 1, ..., n$ 同时成立 $f_i^{n_k} x \to x$.

定理4.51 (van der Waerden 定理).
设 $\mathbb{Z}_+ = B_1 \cup ... \cup B_m$ 是 $\mathbb{Z}_+$ 一个划分; 则必有某个 B_i 包含任意长的算术级数.

证明.
考虑符号空间 $X = \{1, 2, ..., m\}^{\mathbb{Z}_+}$ 和转移映射 $\sigma : X \to X, (\sigma(x))_i = x_{i+1}$. 设 d 是习题28 中所定义的 X 上的相容度量; 那么 $d(x, y) < 1$ 当且仅当 $x_1 = y_1$. 定义 X 中的元 $w : w(i) = k$ 当且仅当 $i \in B_k$. 设 $Y = \overline{\mathcal{O}(w, \sigma)}$; 则 Y 是 σ-不变紧集. 任意给定正整数 l; 对 $1 \leq i \leq l$, 设 $f_i = \sigma^i$; 则 $f_1, ..., f_l$ 两两交换. 根据定理4.50, 存在 $y \in Y$ 和序列 $n_k \to \infty$ 使得对所有 $i = 1, ..., l$ 同时成立 $f_i^{n_k} y \to y$; 特别地, 对某一固定的 n 及每个 i, 有 $d(f_i^n y, y) < 1/2$. 这蕴含 $y_1 = f_1^n(y)_1 = f_2^n(y)_1 = ... = f_l^n(y)_1$; 即 $y_1 = y_{1+n} = y_{1+2n} = ... = y_{1+ln}$. 取正整数 p 使得 $d(\sigma^p(w), y) < 1/(1 + nl)$. 这样 $\sigma^p(w)_1 = \sigma^p(w)_{1+n} = ... = \sigma^p(w)_{1+ln}$; 即 $w_{1+p} = w_{1+p+n} = ... = w_{1+p+ln}$. 这蕴含算术级数 $\{1 + p, 1 + p + n, ..., 1 + p + ln\}$ 属于同一个 B_i. □

第 5 章 连通性

5.1 连通空间

本节中, 我们将给出连通性的定义并讨论连通性对取闭包、做乘积、和连续像的保持性. 我们还会给出连通分支的定义和基本性质.

定义5.1.

如果 U 和 V 是拓扑空间 X 的两个不交的非空开集并且 $X = U \cup V$, 则称 $\{U, V\}$ 构成 X 的一个**分割**.

从上述定义可见, 若 $\{U, V\}$ 是一个分割, 则 U 和 V 也是不交的闭集.

定义5.2.

如果拓扑空间 X 不存在分割, 则称 X 是**连通**的.

例子5.1.

$\mathbb{R}$ 是连通的.

证明.

假设 $\mathbb{R}$ 不连通. 则存在分割 $\{U, V\}$. 取 $x \in U$, $y \in V$; 不妨设 $x < y$. 令 $z = \sup([x, y] \cap U)$. 若 $z \in U$, 则存在 $\delta > 0$ 使得 $[z, z+\delta] \subset U$; 这与 z 的定义相矛盾. 所以, $z \in V$. 这样, 存在 $\delta' > 0$ 使得 $[z-\delta', z] \subset V$; 这又与 z 的定义相矛盾. 所以, $\mathbb{R}$ 连通. □

命题5.3.

设 A 是 X 的连通子空间. 若 $A \subset B \subset \overline{A}$, 则 B 是连通的. 特别地, 连通集的闭包是连通的.

证明.

假设 $\{U, V\}$ 是 B 的一个分割. 因 A 连通, 故不妨设 $A \subset U$. 而 U 是 B 的闭子集, 所以 $\overline{A} \cap B \subset U$. 又 $B \subset \overline{A}$, 故 $B \subset U$. 这与假设矛盾. □

例子5.2.

设 $a<b$ 是两个实数. 作为 $\mathbb{R}$ 的子空间, $(a,b),[a,b),(a,b],[a,b]$ 都是连通的.

证明.

因 $(a,b)\cong\mathbb{R}$, 由例子 5.1 知 (a,b) 是连通的. 再根据命题 5.3 知 $[a,b),(a,b],[a,b]$ 都是连通的. $\square$

下面命题刻画了 $\mathbb{R}$ 的所有连通子集.

命题5.4.

$\mathbb{R}$ 的子空间 A 是连通的当且仅当对任意 $x<y\in A$, 有 $[x,y]\subset A$.

证明.

$(\Longrightarrow)$ 假设存在 $x<y\in A$, 满足 $[x,y]\not\subset A$. 任取 $z\in(x,y)\setminus A$. 令 $U=(-\infty,z)\cap A$, $V=(z,+\infty)\cap A$. 则 $\{U,V\}$ 构成 A 的一个分割. 这与 A 的连通性矛盾.

$(\Longleftarrow)$ 假设 A 是不连通的. 则存在 A 的一个分割 $\{U,V\}$. 取 $x\in U,y\in V$. 不妨设 $x<y$. 因 $[x,y]\subset A$, 所以 $\{U\cap[x,y],V\cap[x,y]\}$ 构成 $[x,y]$ 的一个分割. 而由例 5.2 知, $[x,y]$ 是连通的. 这导致矛盾. $\square$

习题53.

写出 $\mathbb{R}$ 的所有连通子集.

命题5.5.

拓扑空间 X 是连通的当且仅当 X 中既开又闭的子集只有 $\emptyset$ 和 X.

证明.

$(\Longrightarrow)$ 显然, $\emptyset$ 和 X 是即开且闭的. 假设 $A\subset X$ 是即开且闭的非空真子集, 则 $X\setminus A$ 也是即开且闭的非空真子集. 这样 $\{A,X\setminus A\}$ 构成 X 的一个分割. 这与 X 的连通性矛盾.

$(\Longleftarrow)$ 假设 X 不连通. 设 $\{U,V\}$ 是 X 的一个分割. 则 U 是 X 的既开且闭的非空真子集. 这导致矛盾. $\square$

命题5.6.

设 X 是连通空间, $f: X \to \mathbb{R}$ 是 X 上连续函数. 如果对每个 $x \in X$, 都存在 x 的开邻域 U_x 使得 f 在 U_x 上取常值, 则 f 是常值函数.

证明.

任取 $c \in f(X)$. 对每个 $x \in f^{-1}(c)$, 由题中假设知存在 x 的开邻域 U_x 使得 $f(U_x) = \{c\}$, 即 $U_x \subset f^{-1}(c)$. 所以, $f^{-1}(c)$ 是开集. 由 f 的连续性, $f^{-1}(c)$ 也是闭集. 应用命题 5.5, 我们有 $f^{-1}(c) = X$. 所以, f 是常值函数. □

命题5.7.

设 Y 是拓扑空间 X 的子空间. 则 Y 是连通的当且仅当 Y 中不存在这样的不交非空集合 A 和 B 使得 $Y = A \cup B$, $A \cap \overline{B} = \emptyset$, 且 $B \cap \overline{A} = \emptyset$.

证明.

($\Longrightarrow$) 设 Y 是连通的. 假设存在不交非空集合 A 和 B 使得 $Y = A \cup B$, $A \cap \overline{B} = \emptyset$, 且 $B \cap \overline{A} = \emptyset$. 则 $A = (X \setminus \overline{B}) \cap Y$, 且 $B = (X \setminus \overline{A}) \cap Y$. 于是, $\{A, B\}$ 构成 Y 的一个分割. 这导致矛盾.

($\Longleftarrow$) 假设 Y 不连通; 则存在 Y 的分割 $\{A, B\}$. 取 X 的开集 U, V 使得 $A = U \cap Y$, $B = V \cap Y$. 则 $\overline{B} \subset X \setminus U$ 且 $\overline{A} \subset X \setminus V$. 于是, $A \cap \overline{B} = \emptyset$ 且 $B \cap \overline{A} = \emptyset$. 这导致矛盾. □

例子5.3.

平面 $\mathbb{R}^2$ 的子集 $\{(x, y) : y = 0\} \cup \{(x, y) : xy = 1 \text{ 且 } x > 0\}$ 是不连通的.

命题5.8.

设 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 X 的一族连通子空间且 $\cap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$. 则 $\cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 是连通的.

证明.

取 $z \in \cap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. 假设 $\cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 不是连通的. 则存在 $\cup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 的一个分割 $\{U, V\}$. 不妨

设 $z \in U$. 对每个 λ, 由 X_λ 的连通性, 有 $X_\lambda \subset U$. 这样, $\cup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda \subset U$. 这与假设矛盾. 所以, $\cup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 连通. □

命题5.9.

两个连通空间的乘积还是连通的.

证明.

设 X 和 Y 是连通空间. 固定 $y_0 \in Y$. 对每个 $x \in X$, 因 $\{x\} \times Y \cong Y, X \times \{y_0\} \cong X$, 故 $\{x\} \times Y$ 和 $X \times \{y_0\}$ 是连通的. 而 $(x, y_0) \in (\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y_0\})$, 由命题5.8, 知 $(\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})$ 是连通的. 又 $X \times Y = \cup_{x\in X}((\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\}))$, 再由命题5.8, 知 $X \times Y$ 是连通的. □

下面命题比命题5.9更为一般.

命题5.10.

任意个连通空间的乘积空间是连通的.

证明.

设 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族连通空间. 假设 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上存在一个分割 $\{U, V\}$. 取 $(a_\lambda) \in U$. 我们归纳地证明下面断言: 如果 (b_λ) 与 (a_λ) 只在有限个指标处取值不同, 则 $(b_\lambda) \in U$. 假设对某个 $\alpha \in \Lambda$ 有 $b_\alpha \neq a_\alpha$; 但对每个 $\lambda \neq \alpha$ 有 $b_\lambda = a_\lambda$. 考虑 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 的子集 $A \equiv \{(x_\lambda) :$ 对每个 $\lambda \neq \alpha, x_\lambda = a_\lambda\}$. 因 A 与 X_α 同胚, 所以 A 是连通的. 而 $(a_\lambda) \in A$, 故 $A \subset U$. 又 $(b_\lambda) \in A$, 故 $(b_\lambda) \in U$. 假设对正整数 n, 我们已证: 如果 (b_λ)与(a_λ) 只在 n 个指标处取值不同, 则 $(b_\lambda) \in U$. 现在假设对 $n+1$ 个指标 $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$ 有 $b_{\lambda_i} \neq a_{\lambda_i}$; 对其余指标 λ 有 $b_\lambda = a_\lambda$. 定义 $(c_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda : c_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}(1 \leq i \leq n); c_{\lambda_{n+1}} = b_{\lambda_{n+1}}; c_\lambda = a_\lambda(\lambda \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}\})$. 则 (c_λ)与(a_λ) 只有一个指标处取值不同, 与 (b_λ) 有 n 个指标处取值不同. 由归纳假设得 $(b_\lambda) \in U$. 这样断言成立. 而所有与 (a_λ) 只在有限个指标处取值不同的点在 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 中稠密, 又 U 是 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 的闭集, 故 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \subset U$. 这是一个矛盾. □

例子5.4.

$\mathbb{R}^n$ 是连通的.

命题5.11.

连通空间的连续像是连通的.

证明.

设 X 是连通的, $f: X \to Y$ 连续. 假设 $f(X)$ 不连通, 则存在 $f(X)$ 的分割 $\{U, V\}$. 这样, 由习题 22, 我们知 $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ 构成 X 的一个分割. 这与 X 的连通性矛盾. □

例子5.5.

平面的子集 $S = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ 是连通的 (该空间称作**拓扑学家的正弦曲线**).

证明.

考虑连续映射 $\phi : (0, 1] \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, \sin(1/x))$. 因 $(0, 1]$ 是连通的, 由命题 5.11 知 $\{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的连通子集. 而 $S = \overline{\{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}}$, 故 S 是连通的. □

命题5.12 (介值定理).

设 X 是连通空间, $f : X \to \mathbb{R}$ 是连续函数. 则对任意 $a < b \in f(X)$ 及任意 $c \in [a, b]$, 都存在 $x \in X$, 成立 $f(x) = c$.

证明.

由命题 5.11 知 $f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 的连通子集. 再由命题 5.4 知结论成立. □

定义5.13.

设 A 是 X 的连通子空间. 如果不存在真包含 A 的 X 的连通子空间, 则称 A 是 X 的一个**连通分支**.

命题5.14.

连通分支是闭集; 任何两个连通分支或者重合或者不交.

证明.

设 A 是拓扑空间 X 的一个连通分支. 由命题5.3 知 $\overline{A}$ 连通. 再根据连通分支的定义, 得 $A = \overline{A}$. 所以, A 是闭集. 若 B 是 X 的一个连通分支且 $A \cap B \neq \emptyset$, 则由命题5.8 知 $A \cup B$ 是连通的. 再根据连通分支的定义,得 $A = A \cup B = B$. □

定义5.15.

若拓扑空间 X 的每个单点集都是一个连通分支, 则称 X 是完全不连通的.

例子5.6.

有理数集是完全不连通的.

例子5.7.

Cantor 三分集是完全不连通的.

5.2 Cantor 三分集的刻画*

本节中, 我们将给出 Cantor 三分集的拓扑刻画.

定义5.16.

设 $(x_i)_{i=1}^n$ 是度量空间 (X, d) 中的一个点列. 如果对某个 $\epsilon > 0$ 和每个 $1 \leq i \leq n-1$ 有 $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$, 则称 $(x_i)_{i=1}^n$ 是一个 **ϵ-链**.

引理5.17.

设 (X, d) 是一个紧度量空间. 对每个正整数 k, 设 $(x_i^{(k)})_{i=1}^{n(k)}$ 是一个 ϵ_k-链. 设 $K = \{x \in X :$ 存在 $k_j \to \infty$ 及 $i_j \in \{1, ..., n(k_j)\}$ 使得 $x_{i_j}^{(k_j)} \to x\}$. 如果 $(x_1^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ 收敛且 $\epsilon_k \to 0$, 则 K 是连通的非空闭集.

证明.

因 X 是紧度量空间, 故 $K \neq \emptyset$. 由 K 的定义, 易见 K 是闭集. 假设 $\{A, B\}$ 是 K 的一个分割; 则 A, B 是 X 的非空不交闭集. 设 $c = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$. 由 X 的紧性

知 $c > 0$. 设 $U = B(A, c/3), V = B(B, c/3)$; 则 U, V 是 X 的不交开集. 设 $x_1^{(k)} \to z \in A$. 通过选取子列, 我们不妨设: 对每个 k 有 $x_1^{(k)} \in U$ 及 $\{x_1^{(k)}, ..., x_{n(k)}^{(k)}\} \cap V \neq \emptyset$. 设 i_k 满足: 对 $i \leq i_k$ 有 $x_i^{(k)} \in U$, 但 $x_{i_k+1}^{(k)} \notin U$. 这样, 由 ϵ-链的定义, 当 $\epsilon_k < c/3$ 时, 我们有 $x_{i_k+1}^{(k)} \in X \setminus (U \cup V)$. 设 z 为点列 $(x_{i_k+1}^{(k)})$ 的任一极限点; 则 $z \in X \setminus (U \cup V)$. 但由 K 的定义, 有 $z \in K$. 这导致矛盾. 所以 K 连通. □

设 A, B 是度量空间 X 的两个子集. 如果一个 ϵ-链 $(x_i)_{i=1}^n$ 满足 $x_1 \in A$ 且 $x_n \in B$, 则称其是从 A **到** B **的**.

引理5.18.

设 (X, d) 是一个紧完全不连通的度量空间. 若 A 和 B 是 X 的两个不交的非空闭集, 则存在 $\epsilon > 0$ 使得: 不存在从 A 到 B 的 ϵ-链.

证明.

假设对每个正整数 k, 存在从 A 到 B 的 $1/k$-链 $(x_i^{(k)})_{i=1}^{n(k)}$. 通过选取子列, 不妨设 $x_1^{(k)} \to x \in A$ 且 $x_{n(k)}^{(k)} \to y \in B$. 因 A 与 B 不交, 故 $x \neq y$. 由引理 5.17, 存在一个连通闭集 K 使得 $x, y \in K$. 这与 X 的完全不连通性相矛盾. □

下面引理可以直接从 ϵ-链的定义得出.

引理5.19.

设 (X, d) 是一个紧度量空间, $A \subset X$. 则对每个 $\epsilon > 0$, 集合 $C_\epsilon(A) := \{x \in X :$ 存在从 A 到 $\{x\}$ 的 ϵ-链$\}$ 是既开且闭的.

命题5.20.

设 (X, d) 是完全不连通的紧度量空间. 则对每个 $x \in X$ 和每个 $\epsilon > 0$, 都存在 x 的既开且闭的邻域 U 满足 $\mathrm{diam}(U) \leq \epsilon$.

证明.

设 $A = \overline{B(x, \epsilon/3)}$, $B = X \setminus B(x, \epsilon)$; 则 A, B 是 X 的不交闭集. 我们假设 $B \neq \emptyset$, 否

则 $B(x,\epsilon) = X$ 满足要求. 由引理5.18, 设 $c > 0$ 满足: 不存在从 A 到 B 的 c-链. 由引理5.19, $C_c(A)$ 是 A 的既开且闭的邻域. 而 $C_c(A) \subset B(x,\epsilon)$, 故 $\mathrm{diam}(C_c(A)) \leq \epsilon$. 令 $U = C_c(A)$ 即可. □

引理5.21.

设 (X,d) 是完全不连通的紧度量空间. 则对每个 $\epsilon > 0$, 都存在由既开且闭集构成的 X 的有限划分 $\{A_i : i = 1,...,n\}$, 使得对每个 i 有 $\mathrm{diam}(A_i) < \epsilon$.

证明.

由命题5.20, 对每个 $x \in X$ 都存在既开且闭的邻域 U_x, 使得 $\mathrm{diam}(U_x) < \epsilon$. 这样 $\{U_x : x \in X\}$ 构成 X 的开覆盖. 而 X 是紧的, 故存在有限个 $x_1,...,x_k \in X$ 使得 $X = \cup_{i=1}^k U_{x_i}$. 对 $1 \leq i \leq k$, 令 $A_i = U_{x_i} \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} U_{x_j})$. 则 $\{A_i : i = 1,...,k\}$ 满足要求. □

定义5.22.

若拓扑空间 X 不含孤立点, 则称 X 是**完全**的.

引理5.23.

设 (X,d) 是完全不连通的、完全的、紧度量空间; 则对每个正整数 n, 都存在 X 的由 n 个非空的既开且闭集构成的划分 $\{A_1,...,A_n\}$.

证明.

我们归纳地证明. 当 $n = 1$ 时, 取 $A_1 = X$ 即可. 假设对 $n = k$, X 存在由 k 个既开且闭集构成的划分 $\{A_1,...,A_k\}$. 因 X 不含孤立点, 所以 A_1 包含至少两个点 a,b. 对子空间 A_1 应用命题5.20, 知存在 a 的一个既开且闭的邻域 $B \subset A_1$ 使得 $b \notin B$. 于是 $B, A\setminus B, A_2,...,A_k$ 构成 X 的由 $k+1$ 个既开且闭集构成的划分. 这样, 结论对 $n = k+1$ 成立. □

定理5.24.

设 (X,d) 是完全不连通的、完全的、紧度量空间; 则 $X \cong \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$.

证明.

对每个正整数 n 和每个 $(i_1, ..., i_n) \in \{0,1\}^n$, 我们将定义 X 的满足以下条件的既开且闭集 $U_{i_1...i_n}$:

(1) $\{U_{i_1...i_n} : (i_1, ..., i_n) \in \{0,1\}^n\}$ 构成 X 的一个划分,

(2) 对每个 $j \in \{0,1\}$, $U_{i_1...i_n} \supset U_{i_1...i_n j}$,

(3) $\mathrm{diam}(U_{i_1...i_n}) \to 0$ $(n \to \infty)$.

固定一列正数 $(\epsilon_i)_{i=1}^\infty$ 使得 $\epsilon_i \to 0$. 对 ϵ_1, 由引理 5.21, 存在 X 的既开且闭的划分 $\mathcal{B}_1 := \{B_1, ..., B_{k_1}\}$ 使得对给个 i 有 $\mathrm{diam}(B_i) < \epsilon_1$. 取正整数 m_1 使得 $2^{m_1-1} \le k_1 < 2^{m_1}$. 对子空间 B_1 及正整数 $2^{m_1} - k_1 + 1$ 应用引理 5.23, 存在 B_1 的由既开且闭集构成的划分 $\mathcal{C}_1 := \{C_1, ..., C_{2^{m_1}-k_1+1}\}$. 这样 $\mathcal{D}_1 := \mathcal{C}_1 \cup (\mathcal{B}_1 \setminus B_1)$ 是 X 的恰由 2^{m_1} 个既开且闭集构成的划分, 并且其中每个元的直径小于 ϵ_1. 我们将 $\mathcal{D}_1$ 中的元重新记作 $\{U_{i_1...i_{m_1}} : (i_1, ..., i_{m_1}) \in \{0,1\}^{m_1}\}$. 对 $1 \le j < m_1$ 及 $(i_1, ..., i_j) \in \{0,1\}^j$, 我们归纳地定义 $U_{i_1...i_j} = U_{i_1...i_j 0} \cup U_{i_1...i_j 1}$.

假设对 ϵ_k, 我们已定义正整数 m_k 和满足以下条件的既开且闭集的族 $\cup_{j=1}^{m_k}\{U_{i_1...i_j} : (i_1, ..., i_j) \in \{0,1\}^j\}$: $\mathrm{diam}(U_{i_1...i_k}) < \epsilon_k$; $U_{i_1...i_j} = U_{i_1...i_j 0} \cup U_{i_1...i_j 1}$; $\{U_{i_1...i_{m_k}} : (i_1, ..., i_{m_k}) \in \{0,1\}^{m_k}\}$ 构成 X 的划分. 对 ϵ_{k+1}, 类似于对 ϵ_1 时的讨论, 我们不难得到正整数 $m_{k+1} > m_k$ 和既开且闭的集族 $\{U_{i_1...i_{m_{k+1}}} : (i_1, ..., i_{m_{k+1}}) \in \{0,1\}^{m_{k+1}}\}$, 使得: 对每个 $(i_1, ..., i_{m_k})$, 集族 $\{U_{i_1...i_{m_k} j_1...j_{l_k}} : (j_1, ..., j_{l_k}) \in \{0,1\}^{l_k}\}$ 构成 $U_{i_1...i_{m_k}}$ 的划分, 其中 $l_k = m_{k+1} - m_k$; $\mathrm{diam}(U_{i_1...i_{m_{k+1}}}) < \epsilon_{k+1}$. 对 $1 \le s < l_k$ 及 $(j_1, ..., j_s) \in \{0,1\}^s$, 我们归纳地定义 $U_{i_1...i_{m_k} j_1...j_s} = U_{i_1...i_{m_k} j_1...j_s 0} \cup U_{i_1...i_{m_k} j_1...j_s 1}$.

通过以上的归纳定义过程, 我们最终得到满足条件 (1) − (3) 的 $U_{i_1...i_n}$. 于是, 对每个 $x \in X$, 都存在唯一的下降序列 $U_{i_1} \supset U_{i_1 i_2} \supset U_{i_1 i_2 i_3} \supset \cdots$, 使得 $\{x\} = \cap_{j=1}^\infty U_{i_1...i_j}$. 我们定义 $\phi(x) = (i_1, i_2, ...) \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$. 容易验证这样定义的 $\phi : X \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 是一个同胚. □

推论5.25.

每个完全不连通的、完全的、紧度量空间都同胚于 Cantor 三分集.

5.3 道路连通和弧连通

本节中, 我们将给出道路连通和弧连通的定义并讨论道路连通性、弧连通性、连通性三者之间的关系.

定义5.26.

设 x, y 是拓扑空间 X 中两个点, $\gamma : [0,1] \to X$ 是连续映射. 若 $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, 则称 γ 是从 x 到 y 的一条**道路**.

定义5.27.

如果对拓扑空间 X 中任意两点 x, y 都存在从 x 到 y 的道路,则称 X 是**道路连通**的.

命题5.28.

道路连通空间是连通的.

证明.

设 X 是道路连通的. 假设 $\{U, V\}$ 是 X 的一个分割. 取 $x \in U, y \in V$. 由道路连通性, 存在连续映射 $\gamma : [0,1] \to X$ 使得 $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. 这样 $\gamma([0,1])$ 为 X 的连通子集. 但 $\{U \cap \gamma([0,1]), V \cap \gamma([0,1])\}$ 构成 $\gamma([0,1])$ 的一个分割. 这导致矛盾. 所以, X 连通. □

例子5.8.

例 5.5 中拓扑学家的正弦曲线是连通的但非道路连通的.

定义5.29.

设 A 是拓扑空间 X 的一个子空间. 如果 A 与 $[0,1]$ 同胚, 则称 A 是 X 中的一段**弧**; 对于一个取定的同胚 $f : [0,1] \to A$, 我们也将 A 记作 $[a, b]$, 其中 $a = f(0), b = f(1)$; 这时称 A 是以 a, b **为端点的弧**, 或弧 A **连接** a **和** b.

习题54.

证明定义 5.29 中弧 A 的端点集合 $\{a, b\}$ 不依赖于同胚 f 的选取.

定义5.30.

如果对拓扑空间 X 中任意两点 $x \neq y$, 都存在 X 中连接 x 和 y 的弧 $[x, y]$, 则称拓扑空间 X 为**弧连通**的.

从定义可知弧连通空间是道路连通的. 反过来, 我们有下面定理(证明见 [*9*, *11*]).

定理5.31.

若 X 是道路连通的 Hausdorff 空间, 则 X 是弧连通的.

问题5.32.

命题 5.31 中的 Hausdorff 条件是否必需?

定义5.33 (华沙圈).

设 S 是例 5.5 中拓扑学家的正弦曲线, $A = \{(0, y) : -2 \leq y \leq -1\} \cup \{(x, -2) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(1, y) : -2 \leq y \leq \sin(1)\}$. 我们称与 $W := S \cup A$ 同胚的空间为**华沙圈**.

习题55.

华沙圈是弧连通的.

注记5.34.

一条道路的像可能与我们想象的样子相差甚远. 例如, 平面内的单位闭圆盘可以是闭区间在连续映射下的像集.

5.4 局部连通和局部弧连通

本节中, 我们给出局部连通、弱局部连通、局部弧连通的定义并讨论它们之间的关系. 我们还会讨论局部连通性对乘积和连续像的保持性, 并证明局部连通空间的连通分支的开性.

定义5.35.

设 x 是拓扑空间 X 中的点. 如果对 x 的每个邻域 U, 都存在包含 x 的连通开集 V 使

得 $V\subset U$, 则称 X 在 x 处是局部连通的. 若 X 在每个点处都是局部连通的, 则称 X 是**局部连通**的.

例子5.9.

$\mathbb{R}^n$ 是局部连通的.

例子5.10.

拓扑学家的正弦曲线不是局部连通的.

命题5.36.

若 X 是局部连通的, 则 X 的每个连通分支都是即开且闭集.

证明.

设 A 是 X 的连通分支. 由命题 5.14 知 A 是闭的. 对每个 $x\in A$, 由局部连通性, 存在 x 的一个连通开邻域 U_x. 这样 $A\cup U_x$ 是包含 A 的连通集. 由连通分支的定义, 我们得到 $U_x\subset A$. 所以, A 是开集. □

命题5.37.

若 $\{X_{\lambda\in\Lambda}\}$ 是一族局部连通空间且除了有限个 λ 外 X_λ 都是连通的, 则乘积空间 $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 是局部连通的.

证明.

设有限集 $F\subset\Lambda$ 满足: 对每个 $\lambda\in\Lambda\backslash F$, X_λ 都是连通的. 对 $(x_\lambda)\in\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 及 (x_λ) 的开邻域 $V:=\prod_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$, 设有限集 $S\subset\Lambda$ 满足: 对每个 $\lambda\in\Lambda\setminus S$, $V_\lambda=X_\lambda$. 由局部连通性, 对每个 $\lambda\in F\cup S$, 都存在 x_λ 的连通开邻域 $U_\lambda\subset V_\lambda$. 设 $W=\prod_{\lambda\in F\cup S}U_\lambda\times\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus(F\cup S)}X_\lambda$. 由命题 5.10, W 是 (x_λ) 的连通开邻域且 $W\subset V$. □

习题56.

请举一个例子说明局部连通空间的乘积可以不是局部连通的.

定义5.38.

我们称非空紧连通 Hausdorff 空间为**连续统**; 称局部连通的连续统为 Peano **连续统**.

定义5.39.

如果对空间 X 中每一点 x 以及 x 的每个邻域 U, 都存在包含 x 的弧连通开集 V 使得 $V \subset U$, 则称 X 为**局部弧连通**的.

显然, 局部弧连通空间是局部连通的. 反过来, 我们有下面定理 (证明见 [9]).

定理5.40.

设 X 是一个 Peano 连续统; 则 X 中每个连通开集都是弧连通的. 特别地, X 本身是弧连通并且局部弧连通的.

习题57.

请构造半开区间 $[0,1)$ 到华沙圈的连续满射.

习题 57 表明局部连通性在连续映射下一般不再保持, 但我们有下面的命题 (证明见 [9]).

命题5.41.

设 X 是一 Peano 连续统, Y 是紧度量空间. 若 Y 是 X 的连续像, 则 Y 是局部连通的.

定义5.42.

设 x 是拓扑空间 X 中的点. 如果对 x 的每个邻域 U, 都存在包含 x 的连通邻域 V 使得 $V \subset U$, 则称 X 在 x 处是弱局部连通的. 若 X 在每个点处都是弱局部连通的, 则称 X 是**弱局部连通**的.

注记5.43.

上面的定义中不要求 V 是开集. 这样, 局部连通性自然蕴含弱局部连通性.

下面命题的证明见 [15].

命题5.44.

设 X 是一连续统. 则 X 是局部连通的当且仅当其是弱局部连通的.

习题58.

请构造一个连续统 X, 其在某个点处是弱局部连通但不局部连通的.

5.5 逆极限与自然扩充*

我们给出逆系统及逆极限的定义, 以及动力系统自然扩张的定义.

引理5.45.

设 $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ 为一列紧度量空间且对每个正整数 i, 有 $X_i \supset X_{i+1}$. 设 $X = \cap_{i=1}^{\infty} X_i$. 若 U 是 X_1 的开子集且 $U \supset X$, 则对充分大的 i, 有 $X_i \subset U$.

证明.

假设对每个 i, 都有 $x_i \in X_1 \setminus U$. 由紧性, 不妨设 $x_i \to x \in X_1 \setminus U$. 对每个正整数 k, 当 i 充分大时, 有 $x_i \in X_i \subset X_k$. 而 X_k 是紧的, 所以 $x \in X_k$. 这样, $x \in \cap_{k=1}^{\infty} X_k = X \subset U$. 这导致矛盾. □

命题5.46.

设 $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ 为一列连续统且满足: 对每个正整数 i, 成立 $X_i \supset X_{i+1}$. 则 $\cap_{i=1}^{\infty} X_i$ 是一连续统.

证明.

设 $X = \cap_{i=1}^{\infty} X_i$. 由有限交性质知 X 是非空紧的. 假设 X 不是连通的, 则存在 X 的一个分割 $X = A \cup B$. 因 X_1 是正规空间, 所以存在 X_1 的不交开集 U, V 使得 $A \subset U, B \subset V$. 这样, 由命题 5.45 知对充分大的 n 有 $X_n \subset U \cup V$. 而 X_n 是连通的, 故 $X_n \subset U$或$X_n \subset V$. 于是 $X \subset U$ 或 $X \subset V$. 这导致矛盾. □

定义5.47.

设 $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一列紧度量空间. 对每个正整数 n, 设 $f_n : X_{n+1} \to X_n$ 是连续满射. 我们称 (X_n) 和 (f_n) 一起构成**逆系统**, 并记作 $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$; 称 f_n 为**键映射**. 我们称空间 $\varprojlim\{X_n, f_n\} := \{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n(x_{n+1}) = x_n, \ \forall\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ 为逆系统 $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**逆极限**.

命题5.48.

设 $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一逆系统; 则 $\varprojlim\{X_n, f_n\}$ 是非空紧可度量化空间. 若每个 X_n 都是连续统, 则$\varprojlim\{X_n, f_n\}$ 是连续统.

证明.

对每个正整数 n, 设 $Y_n = \{(x_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i, \forall 1 \leq i \leq n\}$. 易见, 对每个 n, Y_n 都是 $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 的非空闭集并且 $Y_n \supset Y_{n+1}$. 这样, 由有限交性质知 $\varprojlim\{X_n, f_n\} = \cap_{n=1}^{\infty} Y_n$ 是非空紧的. 由命题 3.20 知其为可度量化的.

我们断言: 对每个正整数 n, $Y_n \cong \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$. 事实上, 可以验证 $\phi : Y_n \to \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i, (x_i)_{i=1}^{\infty} \mapsto (x_i)_{i=n+1}^{\infty}$ 是一同胚. 这样, 若每个 X_n 是连通的, 则根据命题 5.10 知每个 Y_n 是连通的. 进而, 由命题 5.46 知 $\varprojlim\{X_n, f_n\}$ 是连通的. □

设 X 是紧度量空间, $f : X \to X$ 是连续满射. 对每个正整数 n, 令 $X_n = X$, $f_n = f$. 此时, 我们用 $\varprojlim(X, f)$ 表示逆极限 $\varprojlim\{X_n, f_n\}$.

命题5.49.

映射 $\sigma_f : \varprojlim(X, f) \to \varprojlim(X, f)$, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$, 是同胚.

命题5.50.

映射 $\phi : \varprojlim(X, f) \to X, (x_n) \mapsto x_0$ 是动力系统 $(\varprojlim(X, f), \sigma_f)$ 到 (X, f) 的因子映射.

定义5.51.

称动力系统 $(\varprojlim(X, f), \sigma_f)$ 是 (X, f) 的**自然扩张**.

注记5.52.

自然扩张可以把连续映射的问题转化为同胚的问题来处理.

5.6 不可分解连续统*

我们给出不可分解连续统的定义, 并用逆极限给出不可分解连续统的一种构造方法.

定义5.53.

若 X 是非退化连续统且不能写成两个真子连续统的并, 则称 X 是**不可分解的**; 否则, 称 X 是**可分解的**.

命题5.54.

Peano 连续统都是可分解的.

证明.

设 X 是非退化的 Peano 连续统. 则 $c := \mathrm{diam}(X) > 0$. 由局部连通性, 对每个 $x \in X$, 存在 x 的连通开邻域 U_x 满足 $\mathrm{diam}(U_x) < c/2$. 由 X 的紧性, 存在 $k > 1$ 及 $x_1, ..., x_k$ 使得 $\cup_{i=1}^{k} U_{x_k} = X$. 我们假设这样的 k 已达到最小. 令 $K_i = \overline{U}_{x_i}$. 由 X 的连通性, 通过重排下标, 我们不妨假设对每个 $1 \leq m < k$, $(\cup_{i=1}^{m} K_i) \cap K_{m+1} \neq \emptyset$. 这样, X 是两个真子连续统 $\cup_{i=1}^{k-1} K_i$ 和 K_k 的并. 所以, X 是可分解的. □

定义5.55.

设 $(X_n, f_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ 是一逆系统且每个 X_n 都是连续统. 如果对每个 n, 只要 A_{n+1}, B_{n+1} 是 X_{n+1} 的子连续统且 $X_{n+1} = A_{n+1} \cup B_{n+1}$, 就有 $f_n(A_{n+1}) = X_n$ 或 $f_n(B_{n+1}) = X_n$ 成立, 那么我们称逆系统 $(X_n, f_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ 是**不可分解**的.

命题5.56.

设 $(X_n, f_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ 是一不可分解逆系统; 则 $\varprojlim(X_n, f_n)$ 是不可分解连续统.

证明.

我们用 X_∞ 表示 $\varprojlim(X, f)$. 设 A, B 是 X_∞ 的子连续统且 $X_\infty = A \cup B$. 对每个正整数 i, 设 $\pi_i : X_\infty \to X_i$ 为向第 i 个分量的投影; 则 $X_i = \pi_i(A) \cup \pi_i(B)$. 由假设, 对每个 i, 或者 $f_i(\pi_{i+1}(A)) = X_i$, 或者 $f_i(\pi_{i+1}(A)) = X_i$. 由等式 $\pi_i = f_i \circ \pi_{i+1}$ 得到: 或者 $\pi_i(A) = X_i$, 或者 $\pi_i(B) = X_i$. 不妨假设有无限个 i 使得 $\pi_i(A) = X_i$; 再利用等式 $\pi_i = f_i \circ \pi_{i+1}$, 我们进一步得到: 对每个 i 有 $\pi_i(A) = X_i$. 这显然蕴含 A 在 X_∞ 中是稠密的; 从而 $X_\infty = A$. □

定义5.57.

设$f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, z \mapsto z^2$. 我们称连续统$\varprojlim(\mathbb{S}^1, f)$为2-进**螺线管**.

推论5.58.

2-进螺线管是不可分解连续统.

定义5.59.

设 $f : [0,1] \to [0,1]$ 是帐篷映射*(*见例子 2.30*)*. 我们称连续统 $\varprojlim([0,1], f)$ 为**桶柄连续统**.

推论5.60.

桶柄连续统是不可分解的.

5.7 不动点性质*

本节中, 我们将给出不动点性质的定义, 并证明*:* 拓扑学家正弦曲线和华沙圈具有不动点性质.

定义5.61.

如果拓扑空间 X 上每个连续自映射都有不动点, 则称 X 具有**不动点性质**.

命题5.62.

闭区间 $[0,1]$ 有不动点性质.

例子5.11.

平面内单位圆周 $\mathbb{S}^1$ 没有不动点性质.

命题5.63.

例 5.5 中拓扑学家的正弦曲线 S 有不动点性质.

证明.

设 $f : S \to S$ 是连续映射. 设 A 是 S 中连接 $(0,-1)$ 和 $(0,1)$ 的弧段, $B = S \setminus A$; 则 B 同胚于 $[0,1)$. 若 $f(A) \subset A$, 由命题 5.62 知, A 中含 f 的不动点. 所以, 我们可以假设: 对

某个 $x_0 \in A$, $f(x_0) \in B$. 若存在 $x_1 \in A$ 使得 $f(x_1) \in A$, 则 $f([x_0, x_1])$ 是连接 A 中某点和 B 中某点的道路. 这意味着 S 是道路连通的; 矛盾. 所以, $f(A) \subset B$. 若 $f(B) \subset A$, 则 $f(A) \subset f(\overline{B}) \subset \overline{f(B)} \subset A$; 这与假设矛盾. 因此, 存在某点 $x_2 \in S$ 使得 $f(x_2) \in S$. 类似刚刚的讨论, 由 S 的非道路连通性, 我们可得到 $f(B) \subset B$. 这样, $D := f(S)$ 是 B 的连通紧集. 则 B 同胚于 $[0,1)$, 故 D 同胚于闭弧 (可能退化). 因 $f(D) \subset f(S) \subset D$, 故 D 中含 f 的不动点. □

命题5.64.

定义 5.33 中的华沙圈 W 有不动点性质.

证明.

我们采用 Bing 的狗追兔子方法证明该命题 (见 [4]). 设 $p_1 = (0,1), p_2 = (0,-1), p_3 = (1, \sin(1))$. 假设 W 没有不动点性质, 则存在 $f \in C(W,W)$ 使得对任意 $x \in X$ 有 $f(x) \neq x$. 我们将 $x \in W$ 视作一只狗, $f(x)$ 为它要追逐的兔子. 我们将 p_1 作为狗的出发点. 当狗 x 从 p_1 出发向“前”移动时(狗在 p_1 处只能有一个移动方向, 我们称其为“前”方), 兔子 $f(x)$ 只能永远位于 x 的前方, 即 $[p_1, x] \subset [p_1, f(x)]$; 否则, 由连续性将出现某个 $x_0 \in W$ 使得$f(x_0) = x_0$, 而这与假设矛盾. 即使当狗 x 追过 p_3 点不断向“死端” $[p_1, p_2]$ 靠近时, 兔子 $f(x)$ 永远在 x 前面; 特别地, $f(x)$ 也在向 $[p_1, p_2]$ 靠近. 这样, 对每个 $y \in [p_1, p_2]$, 设$y_1, y_2, \cdots \in S$ 使得 $y_i \to y$; 则有 $f(y) = \lim f(y_i) \in [p_1, p_2]$. 于是, $f([p_1, p_2]) \subset [p_1, p_2]$; 特别地, 由命题 5.62, f 在 $[p_1, p_2]$ 中有不动点. 这与假设矛盾. □

5.8 Sharkovskii定理*

本节中, 我们将叙述 **Sharkovskii 定理**, 并对一种特殊情形给出该定理的证明.

我们在正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 上引入下面的序(称作 Sharkovskii **序**):

$3 \prec 5 \prec 7 \prec ... \prec 2m+1 \prec ...$

$... \prec 6 \prec 10 \prec 14 \prec ... \prec 2(2m+1) \prec ...$

$... \prec 12 \prec 20 \prec 28 \prec ... \prec 4(2m+1) \prec ...$

... ...

$... \prec 2^k 3 \prec 2^k 5 \prec 2^k 7 \prec ... \prec 2^k(2m+1) \prec ...$

... ...

$... \prec 2^{k+1} \prec 2^k \prec 2^{k-1} \prec ... \prec 16 \prec 8 \prec 4 \prec 2 \prec 1.$

以下, 我们用 I 表示闭区间 $[0,1]$. 设 $f: I \to I$ 是连续映射. 下面定理的证明见 [*16*].

定理5.65 (Sharkovskii 定理).

若 f 有一个 n 周期点, 则对每个 $n \prec m$, f 都有 m 周期点.

我们只就下面的特殊情形证明该定理 (见[*10*]).

推论5.66.

若 f 有一个 3 周期点, 则它有任意周期的周期点.

为此, 我们先准备两个引理.

引理5.67.

设 $f: I \to I$ 是连续映射. 若 $J_1, J_2 \subset I$ 是闭子区间且满足 $f(J_1) \supset J_2$, 则存在 $J_0 \subset J_1$ 使得$f(J_0) = J_2$.

设 $x \in I$ 是 f 的一个 3 周期点且满足 $x < f(x) < f^2(x)$. 记 $J = [x, f^2(x)], J' = [x, f(x)], J'' = [f(x), f^2(x)]$.

引理5.68.

对 $n > 3$, 存在闭区间的下降列 $J'' = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_{n-2} \supset I_{n-1}$ 满足以下性质: (1) $I_k = f(I_{k+1})$ $(\forall\ k = 0, \cdots, n-3)$; (2) $f^{n-1}(I_{n-1}) = J'$; (3) $f^n(I_{n-1}) \supset J''$.

推论 5.66 的证明.

设 x 是 f 的一个 3 周期点. 不失一般性, 我们可以假定 $x < f(x) < f^2(x)$. 设 J, J', J'' 如引理 5.68. 由 $f(J'') \supset J''$ 知 f 有不动点. 由 $f^2(J') \supset J'$ 知存在 $z \in J'$ 使得 $f^2(z) = z$. 这样 $f(z) \in J''$. 因 $f(x)$ 是 3 周期点, 故 $z \neq f(x)$. 特别地, $z \neq f(z)$. 这样 z 是 2

周期点. 现在假设 $n > 3$. 设 $I_k(k = 0, \cdots, n-1)$ 为满足引理5.68 中条件的区间列. 因 $f^n(I_{n-1}) \supset J'' \supset I_{n-1}$, 故存在 $z \in I_{n-1}$ 使得 $f^n(z) = z$. 下证 z 的周期为 n. 根据引理5.68 的 (1) 和 (2), 有 $z, f(z), \cdots, f^{n-2}(z) \in J''$ 且 $f^{n-1}(z) \in J'$. 我们断言: $f^{n-1}(z) \notin J''$. 否则 $f^{n-1}(z) = f(x)$. 于是 $z = f^n(z) = f^2(x)$ 且 $f(z) = x \notin J''$. 这蕴含 $n = 2$, 与假设矛盾. 设 m 是 z 的周期. 若 $m \neq n$, 则 $m|n$. 而 $n \geq 4$, 故 $m \leq n-2$. 于是存在 $p \leq n-2$ 使得 $f^{n-1}(z) = f^p(z) \in J''$. 这与断言矛盾. □

第 6 章 可数性公理和度量化定理

本节中, 我们将给出可数性的定义和等价刻画. 然后, 我们讨论可数性对集合并及乘积的保持性. 最后, 我们证明两类重要的完全空间的不可数性.

6.1 可数性

定义6.1.

若集合 A 或是有限的, 或是与正整数集存在一一对应, 则称它是**可数集**. 若一个集合不是可数的, 则称其为是**不可数集**.

例子6.1.

整数集是可数的; 偶数集是可数的.

例子6.2.

$\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 是不可数的.

证明.

假设 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 是可数的; 则存在双射 $\phi : \mathbb{Z}_+ \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}, n \mapsto (x_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$. 对每个 n, 令 $\{y_n\} = \{0,1\} \setminus \{x_n^{(n)}\}$. 则 $(y_i) \neq (x_i^{(n)})$ $(\forall n)$; 特别地, $(y_i) \notin \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$. 矛盾. □

例子6.3.

实数集 $\mathbb{R}$ 是不可数的.

例子6.4.

康托三分集是不可数的.

命题6.2.

设 A 是非空集, 则以下条件等价:

(1) A 是可数的;

(2) 存在满射 $f:\mathbb{Z}_+\to A$;

(3) 存在单射 $g:A\to\mathbb{Z}_+$.

证明.

(1) $\Longrightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Longrightarrow$ (3). 设 $f:\mathbb{Z}_+\to A$ 是满射. 对每个 $a\in A$, 令 $g(a)=\min\{f^{-1}(a)\}$; 则 $g:A\to\mathbb{Z}_+$ 是单射.

(3) $\Longrightarrow$ (1). 设 $g:A\to\mathbb{Z}_+$ 为单射. 不妨设 A 是无限集; 则 $S:=\{g(a):a\in A\}$也是无限的. 下面归纳地定义映射 $\phi:\mathbb{Z}_+\to S$: 令 $\phi(1)=\min\{S\}$; 假设对 $n\in\mathbb{Z}_+$ 和 $i\le n$, $\phi(i)$ 已经定义; 定义 $\phi(n+1)=\min S\setminus\{f(1),\cdots,f(n)\}$. 易见, ϕ 是双射. □

例子6.5.

$\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ 是可数的. 事实上, 考虑映射 $g:\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+,(m,n)\to 2^m3^n$. 易见, g 是单射. 由命题 6.2(3) 知 $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ 是可数的.

例子6.6.

正有理数集 $\mathbb{Q}_+$ 是可数的. 由命题 6.2(2) 和例子 6.5, 我们只要构造一个从 $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ 到 $\mathbb{Q}_+$ 的满射即可. 容易验证, 映射 $f:\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Q}_+,(m,n)\to\frac{m}{n}$ 满足要求.

命题6.3.

可数个可数集合的并还是可数的.

证明.

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族可数集, 其中指标集 Λ 是可数的. 这样, 存在满射 $f:\mathbb{Z}_+\to\Lambda$; 且对每个 $\alpha\in\Lambda$, 存在满射 $g_\alpha:\mathbb{Z}_+\to A_\alpha$. 考虑映射 $\phi:\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+\to\cup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha,(n,m)\to g_{f(n)}(m)$. 易见, ϕ 是满射. 这样, $\cup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 是可数的. □

命题6.4.

可数集合的有限乘积还是可数的.

证明.

利用归纳法, 我们只要证两个可数集的乘积还是可数的. 设 X 和 Y 是两个可数集. 于是有满射 $f:\mathbb{Z}_+\to X$ 和 $g:\mathbb{Z}_+\to Y$. 这样 $f\times g:\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+\to X\times Y, (m,n)\mapsto(f(m),g(n))$ 是满射. 因此, $X\times Y$ 是可数的. □

命题6.5.

设 X 是非空紧 Hausdorff 空间或完备度量空间. 若 X 不含孤立点, 则 X 是不可数的.

证明.

设 X 是非空紧的不含孤立点的 Hausdorff 空间. 假设 X 是可数的. 若 X 是有限集, 则由 Hausdorff 性质知, X 的每个点都是孤立的; 这导致矛盾. 所以, 我们可设 $X=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. 由 X 的 Hausdorff 性质, 存在非空开集 U_1 使得 $x_1\notin\overline{U_1}$. 因 X 不含孤立点, 所以存在非空开集 $U_2\subset U_1$ 使得, $x_2\notin\overline{U_2}$. 依此类推, 我们得到一列非空开集 $U_1\supset U_2\supset U_3\supset\cdots$ 使得 $x_i\notin\overline{U_i}$ $(\forall i\in\mathbb{Z}_+)$. 由 X 的紧性和有限交性质得, $\cap_{i=1}^{\infty}\overline{U_i}\neq\emptyset$. 但由 U_i 的定义知 $X\cap\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{U_i}=\emptyset$. 矛盾. 所以 X 是不可数的.

对于 X 是不含孤立点的完备度量空间情形, 证明的方式类似 (只要将上面定义的 U_i 换成直径趋于 0 的开球即可). □

6.2 可数性公理

本节中, 我们将给出第一可数空间、第二可数空间、和可分空间的定义并讨论它们之间的关系. 对于第一可数空间, 我们用序列收敛给出集合闭包和映射连续性的刻画.

定义6.6.

设 X 是一拓扑空间, $x\in X$, $\mathcal{B}$ 是 x 的一个开邻域族. 如果对每个 x 的邻域 U 都存在 $V\in\mathcal{B}$ 使得 $V\subset U$, 则称 $\mathcal{B}$ 是 x 的一个**邻域基**.

定义6.7.

如果拓扑空间 X 中每个点都具有可数邻域基, 则称 X 是**第一可数**的.

设 (X,d) 是度量空间. 若 $x \in X$, 则 $\mathcal{N}_x := \{B(x,1/n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 x 的一个可数邻域基. 这样, 我们有下面的命题.

命题6.8.

度量空间是第一可数的.

命题6.9.

设 X 是第一可数的, $A \subset X$; 则 $x \in \overline{A}$ 当且仅当存在 A 中的点列 (x_n) 使得 $x_n \to x$.

证明.

($\Longrightarrow$) 设 $x \in \overline{A}$ 且 $\mathcal{B} := \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 x 的一个可数邻域基. 对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$, 令 $V_n = \cup_{i=1}^{n} U_i$; 则 $V_n \cap A \neq \emptyset$. 取 $x_n \in V_n \cap A$. 这样, 对 x 的每个邻域 W, 存在 $N \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $U_N \subset W$; 特别地, $V_n \subset W$, $\forall n \geq N$. 于是, 当 $n \geq N$ 时, $x_n \in W$. 所以, $x_n \to x$.

($\Longleftarrow$) 设 A 中点列 (x_n) 满足 $x_n \to x$. 任给 x 的领域 U; 则存在 $N \in \mathbb{Z}_+$, 当 $n \geq N$ 时, $x_n \in U$. 特别地, $U \cap A \neq \emptyset$. 由 U 的任意性, 我们有 $x \in \overline{A}$. □

命题6.10.

设 X 是第一可数的; 则 $f : X \to Y$ 是连续的, 当且仅当对每个 $x \in X$ 及收敛到 x 的点列 (x_n) 有 $f(x_n)$ 收敛到 $f(x)$.

证明.

($\Longrightarrow$) 设 $f : X \to Y$ 是连续的且 $x_n \to x$. 任给 $f(x)$ 的邻域 U; 则 $f^{-1}(U)$ 是 x 的邻域. 于是, 存在 $N \in \mathbb{Z}_+$, 当 $n \geq N$ 时, $x_n \in f^{-1}(U)$; 即 $f(x_n) \in U$. 所以, $f(x_n) \to f(x)$.

($\Longleftarrow$) 设 $x \in X$, 且对每个收敛到 x 的 (x_n) 有 $(f(x_n))$ 收敛到 $f(x)$. 设 $\{U_i\}$ 是 x 的一个邻域基; 且对每个正整数 n, 设 $V_n = \cup_{i=1}^{n} U_i$. 假设 f 在 x 处是不连续的, 则存在 $f(x)$ 的邻域 U 使得 $f^{-1}(U)$ 不是 x 的邻域. 于是, 对每个 n, 存在 $y_n \in V_n \setminus f^{-1}(U)$. 这样, $y_n \to x$ 但 $f(x_n) \notin U$ $(\forall n)$. 矛盾. □

定义6.11.

如果拓扑空间 X 有可数拓扑基, 则称其为**第二可数**的.

命题6.12.

第二可数空间是第一可数的.

例子6.7.

欧氏空间是第二可数的.

例子6.8.

任何不可数集合在离散拓扑下都不是第二可数的. 特别地, 不可数集合关于离散度量不是第二可数的.

命题6.13.

紧度量空间是第二可数的.

证明.

设 (X, d) 是紧度量空间. 对每个正整数 n, 考虑 X 的开覆盖 $\{B(x, 1/n) : x \in X\}$. 由 X 的紧性, 存在 $x_1, \cdots, x_{k_n} \in X$ 使得集族 $\mathcal{B}_n := \{B(x_1, 1/n), \cdots, B(x_{k_n}, 1/n)\}$ 构成 X 的开覆盖. 容易验证, 集族 $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ 是一个可数拓扑基. □

定义6.14.

如果拓扑空间 X 中存在可数稠子集, 则称 X 是**可分**的.

命题6.15.

第二可数空间是可分的.

命题6.16.

若 X 是可分度量空间, 则它是第二可数的.

证明.

设 d 是 X 的度量, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X 的一个可数稠子集. 容易验证集族 $\{B(x_i, 1/n) : i, n \in \mathbb{Z}_+\}$ 构成 X 的一个可数拓扑基. □

例子6.9.

实数集在余有限拓扑下是可分的, 但不是第二可数的.

6.3 Urysohn度量化定理

本节中, 我们介绍 Urysohn 引理和 Urysohn 度量化定理.

定理6.17 (Urysohn 引理).

设 X 是正规空间, A 和 B 是 X 中两个不交的闭集; 则存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $A \subset f^{-1}(0)$且$B \subset f^{-1}(1)$.

证明.

设 $P = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. 由 P 的可数性, 我们记 $P = \{p_1 = 0, p_2 = 1, p_3, p_4, \cdots\}$. 下面我们归纳地定义一列开集 $(U_p)_{p\in P}$ 使得当 $p < q$时, $\overline{U_p} \subset U_q$. 令 $U_1 = X \setminus B$. 由正规性, 存在开集 U_0 满足 $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset U_1$. 假设对正整数 k 及 $2 \le i < k$, U_{p_i} 已定义且满足当 $p_i < p_j$ 时 $\overline{U_{p_i}} \subset U_{p_j}$. 因 $0 < p_k < 1$, 一定存在 $s, t \in \{p_1, \cdots, p_{k-1}\}$ 使得 s 和 t 分别是 $\{p_1, \cdots, p_{k-1}\}$ 中小于 p_k 的最大元和大于 p_k 的最小元. 因 $\overline{U_s} \subset U_t$, 由 X 的正规性, 存在开集 U 满足 $\overline{U_s} \subset U \subset \overline{U} \subset U_t$. 令 $U_{p_k} = U$. 易见, 这样定义的 $(U_p)_{p\in P}$ 满足要求.

下面定义映射 $f : X \to [0,1]$. 若 $x \in X \setminus U_1$, 令 $f(x) = 1$; 若 $x \in U_1$, 令 $f(x) = \inf\{p \in P : x \in U_p\}$. 只要证明 f 的连续性. 由 f 的定义我们有: (1) $x \in \overline{U}_r \Rightarrow f(x) \le r$; (2) $x \notin U_r \Rightarrow f(x) \ge r$. 任给 $x \in X$ 和 $\epsilon > 0$. 设 $q \in P$ 满足 $q > f(x) > q - \epsilon$; 取 $p \in P \cap [q-\epsilon, f(x)]$; 则对于 $y \in U_q \setminus \overline{U_p}$, 我们有 $p \le f(y) \le q$. 于是, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. 映射 f 的连续性得证. □

Urysohn 引理的证明启发我们引入下面的定义.

定义6.18.

若 X 是单点闭的且对任意 $x \in X$ 及不含 x 的闭集 A, 都存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $f(x) = 0$ 且 $f(A) = 1$, 则称拓扑空间 X 是**完全正则**的,

下面命题是 Urysohn 引理的直接推论.

命题6.19. 正规空间是完全正则的.

显然完全正则空间是正则的. 存在正则而非完全正则的空间 (见 *[14]*).

命题6.20.

第二可数的正则空间是正规的.

证明.

设 X 是正则的, $\mathcal{B}$ 是 X 的一个可数基. 任给 X 中不交的闭集 A 和 B. 对每个 $x \in A$, 由正则性, 存在 $U_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in U_x \subset \overline{U}_x \subset X \setminus B$. 这样, 我们得到 A 的开覆盖 $\{U_x : x \in A\}$. 因 $\mathcal{B}$ 可数, 我们将 $\{U_x : x \in A\}$ 记作 $\{U_i\}$. 类似地, 我们可以得到 B 的开覆盖 $\{V_i\}$ 使得对每个 i 有 $\overline{V}_i \cap A = \emptyset$. 对每个正整数 n, 我们令 $W_n = U_n \setminus \cup_{i=1}^n \overline{V}_i$, $Z_n = V_n \setminus \cup_{i=1}^n \overline{U}_i$. 令 $W = \cup_{n \in \mathbb{Z}_+} W_n$, $Z = \cup_{n \in \mathbb{Z}_+} V_n$. 容易验证 $A \subset W$, $B \subset Z$, 且 $W \cap Z = \emptyset$. 所以, X 是正规的. □

定理6.21 (Urysohn 度量化定理).

第二可数的正则空间是可度量化的.

证明.

设 X 是第二可数的正则空间; $\mathcal{B} := \{U_n\}_{n=1}^\infty$ 是一可数基. 令 $\mathcal{C} = \{(U_m, U_n) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \overline{U}_m \subset U_n\}$. 由命题 6.20 和 Urysohn 引理, 对每个 $C = (U_m, U_n) \in \mathcal{C}$, 存在连续函数 $f_C : X \to [0,1]$ 使得 $f(\overline{U}_m) = 1$ 且 $f(X \setminus U_n) = 0$. 容易验证函数族 $\{f_C : C \in \mathcal{C}\}$ 满足下面的分离性质: 对每个 $x \in X$ 和 x 的邻域 U, 存在 $C \in \mathcal{C}$, 使得 $f_C(x) > 0$且$f_C(X \setminus U) = 0$.

由 $\mathcal{C}$ 的可数性, 记 $\{f_C : C \in \mathcal{C}\} = \{f_i\}_{i=1}^\infty$. 定义映射 $\phi : X \to \prod_{i=1}^\infty [0,1], x \mapsto (f_i(x))$. 因每个 f_i 都是连续的, 关于 $\prod_{i=1}^\infty [0,1]$ 上的乘积拓扑, ϕ 是连续的. 若 $x \neq y \in X$, 则由函数族 $\{f_C\}$ 的分离性, 存在某个正整数 n 使得 $f_n(x) \neq f_n(y)$. 这样, 映射 ϕ 是单射. 下面证明 $\psi : X \to \phi(X), x \mapsto \phi(x)$ 是开映射. 为此, 任给 X 的开集 U 及 $z_0 \in \psi(U)$; 设 $x_0 \in U$ 满足 $\psi(x_0) = z_0$. 取正整数 N 使得 $f_N(x_0) > 0$且$f_N(X \setminus U) = 0$. 设 $\pi_N : \prod_{i=1}^\infty [0,1] \to [0,1]$ 为向第 N 个分量的投影. 注意到 $\pi_N \circ \psi = f_N$, 我们有 $f_N^{-1}((0,1]) = \psi^{-1}(\pi_N^{-1}((0,1]))$. 令 $V = f_N^{-1}((0,1])$; 则 $x_0 \in V \subset U$ 且 $\psi(V) = \pi_N^{-1}((0,1]) \cap \phi(X)$为$z_0$的含于$\psi(U)$ 的邻域. 这样, $\psi(U)$ 是开集; 即 ψ 为开映射. 于是 $\psi : X \to \phi(X)$ 是同胚.

设 d 是 $\prod_{i=1}^{\infty}[0,1]$ 上一个相容度量. 对任意 $x,y\in X$, 令 $\rho(x,y)=d(\psi(x),\psi(y))$. 由上面的讨论知 ρ 为 X 上一个相容度量. □

命题6.22.

设 X 是紧度量空间, Y 是Hausdorff空间. 若 Y 是 X 的连续像, 则 Y 是可度量化的.

证明.

设 $f:X\to Y$ 为连续满射; 则 Y 是紧的. 又 Y 是Hausdorff的, 故 Y 是正规的. 由Urysohn度量化定理, 只要证明 Y 是第二可数的. 因 X 是紧度量空间, 故 X 是第二可数的; 设 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个可数拓扑基, $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{B}$ 中元的所有有限并构成的集族. 考虑集族 $\mathcal{D}:=\{Y\setminus f(X\setminus U): U\in\mathcal{C}\}$. 由于 f 是闭映射(见命题4.18), $\mathcal{C}$ 是 Y 的一个可数的开集族. 下证 $\mathcal{D}$ 是 Y 的一个拓扑基. 任给 $y\in Y$ 和 y 的开邻域 V. 由连续性, $f^{-1}(V)$ 是闭集 $f^{-1}(y)$ 的开邻域. 由 X 的紧性, 存在正整数 k 及 $U_1,\cdots,U_k\in\mathcal{B}$, 使得 $f^{-1}(y)\subset\cup_{i=1}^{k}U_i\subset f^{-1}(V)$. 于是, $y\in Y\setminus f(X\setminus\cup_{i=1}^{k}U_i)\subset Y\setminus f(X\setminus f^{-1}(V))=V$. 这样, $\mathcal{D}$ 是 Y 的一个拓扑基. □

6.4 Tietze扩张定理

本节中, 我们介绍Tietze扩张定理.

引理6.23.

设 X 是一正规空间, A 是 X 的闭子集, $r>0$. 设 $f:A\to[-r,r]$ 为连续函数; 则存在连续函数 $g:X\to[-r,r]$ 使得: (1) $|g(x)|\le\frac{1}{3}r$ $(\forall x\in X)$; (2) $|g(a)-f(a)|\le\frac{2}{3}r$ $(\forall a\in A)$.

证明.

设 $B=f^{-1}([-r,-\frac{1}{3}r]),C=f^{-1}([\frac{1}{3}r,r])$; 则 B,C 是 X 的不交闭子集. 由Urysohn引理, 存在连续函数 $g:X\to[-\frac{1}{3}r,\frac{1}{3}r]$ 使得 $g(B)=-\frac{1}{3}r,g(C)=\frac{1}{3}r$. 容易验证 g 满足要求. □

定理6.24 (Tietze扩张定理).

设 X 是正规空间, A 是 X 的闭子集. 则从 A 到 $[a,b]$ 的任何连续映射 f 都可以扩张到 X

到 $[a,b]$ 的连续映射, 也即存在连续映射 $g: X\to[a,b]$ 使得对任意 $x\in A$ 有 $g(x)=f(x)$.

证明.

不失一般性, 假设 $[a,b]=[-1,1]$. 对 $r=1$ 应用引理6.23, 我们有连续函数 $g_1: X\to[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ 满足: (1) $|g(x)|\le\frac{1}{3}$ $(\forall x\in X)$; (2) $|g(a)-f(a)|\le\frac{2}{3}$ $(\forall a\in A)$. 对 $r=\frac{2}{3}$ 和函数 $f-g_1$ 应用引理6.23, 我们得到 X 上的连续函数 g_2 满足: (1) $|g_2(x)|\le\frac{1}{3}(\frac{2}{3})$ $(\forall x\in X)$; (2) $|f(a)-g_1(a)-g_2(a)|\le(\frac{2}{3})^2$ $(\forall a\in A)$. 依此类推, 我们得到一列 X 上的连续函数 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足: 对每个正整数 n, (1) $|g_n(x)|\le\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$ $(\forall x\in X)$; (2) $|f(a)-g_1(a)-\cdots-g_n(a)|\le(\frac{2}{3})^n|$ $(\forall a\in A)$. 令 $g=\sum_{i=1}^{\infty}g_i$. 容易验证 g 满足要求. □

6.5 网和网收敛

从命题6.9和6.10我们看到, 当空间满足第一可数公理时(如度量空间), 集合的闭包及函数的连续性都可以用序列收敛刻画. 然而, 下面的例子表明, 对一般的拓扑空间而言, 这样的刻画已不再可行. 本节内容直接取自文献[2]的附录(I).

例子6.10.

设 $X=(-1,1)^{\mathbb{Z}_+}$, $\mathcal{A}=\{\prod_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i): -1<a_i<b_i<1\}$, $O=(0,0,0,...)$. 设 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{A}$ 生成的 X 上的拓扑; 则 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{T}$ 的拓扑基. 设 $\mathcal{N}=\{\prod_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i): -1<a_i<0<b_i<1\}$; 则 $\mathcal{N}$ 为 O 的(不可数)邻域基. 对每个 $U\in\mathcal{N}$, 取 $x_U\in U$ 使得: 对每个 i, $(x_U)_i\neq 0$. 令 $A=\{x_U: U\in\mathcal{N}\}$; 则 $O\in\overline{A}$. 设 $z^{(n)}=(z_i^{(n)})$, $n=1,2,3,...$, 为 A 中任一序列. 对每个 i, 取 $-1<\alpha_i<0<\beta_i<1$, 使得 $(z_i^{(i)})\notin(\alpha_i,\beta_i)$; 则对任意 n, 有 $z^{(n)}\notin\prod_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)$. 所以 O 不是序列 $z^{(n)}$ 的极限点.

下面我们将对一般拓扑空间引入“网”和“网收敛”的定义, 他们分别是“序列”和“序列收敛”的推广. 使用网收敛, 我们仍可以像在第一可数空间时使用序列收敛那样, 对任意拓扑空间刻画集合的闭包和函数的连续性.

定义6.25.

设 D 是带有偏序关系 $\preceq$ 的偏序集. 如果对任意 $x, y \in D$, 都存在 $z \in D$ 满足 $z \succeq x$ 且 $z \succeq y$, 则称 D 是一个**定向集**.

例子6.11.

实数集在 $\leq$ 关系下成为定向集.

例子6.12.

设 x 是拓扑空间 X 中的点, $\mathcal{N}$ 是 x 的所有邻域全体. 定义 $\mathcal{N}$ 上的关系 $\preceq$: 对 $U, V \in \mathcal{N}$, $U \preceq V$ 当且仅当 $U \supset V$; 则 $\mathcal{N}$ 在 $\preceq$ 下成为定向集.

定义6.26.

我们称从定向集 D 到集合 X 的映射 $x : D \to X, i \mapsto x_i$ 为 X 中一个**网**; 记作 $(x_i)_{i \in D}$; 有时简记为 (x_i).

定义6.27.

设 $(x_i)_{i \in D}$ 是集合 X 中的网, $A \subset X$. 如果存在某个 $n \in D$ 使得, 当 $i \succeq n$ 时, $x_i \in A$, 则称网 (x_i) **终于** A; 如果对每个 $m \in D$ 都存在 $i \succeq m$ 使得 $x_i \in A$, 则称 (x_i) **常于** A.

定义6.28.

设 F 是定向集 D 的子集. 如果对每个 $i \in D$ 都存在 $j \in F$ 使得 $j \succeq i$, 则称 F 是 D 的**共尾子集**.

下面命题显然.

命题6.29.

设 D 在偏序关系 $\preceq$ 下为定向集, F 是 D 的共尾子集; 则 F 在 $\preceq$ 下也为定向集.

命题6.30.

设 $(x_i)_{i \in D}$ 是集合 X 中的网, $A \subset X$; 则 $(x_i)_{i \in D}$ 常于 A 当且仅当存在 D 的某个共尾子集 F 使得: 对每个 $i \in F$, 有 $x_i \in A$.

定义6.31.

设 $(x_i)_{i\in D}$ 是拓扑空间 X 中的网, $x \in X$. 如果对 x 的每个邻域 U, 有 (x_i) 终于 U; 即, 存在 $n \in D$ 使得: 对每个 $i \succeq n$, 有 $x_i \in U$; 则称 (x_i) **收敛**到 x; 记作 $\lim x_i = x$ 或 $x_i \to x$.

例子6.13.

设 X 是拓扑空间, $x \in X$, $\mathcal{N}$ 是由 x 的邻域系构成的定向集 (见例 6.12). 对每个 $U \in \mathcal{N}$, 取 $x_U \in U$; 则 (x_U) 为一个网且 $x_U \to x$.

命题6.32.

设 A 是拓扑空间 X 中的子集, $x \in X$; 则 $x \in \overline{A}$ 当且仅当存在 A 中的网 (x_i) 使得 $x_i \to x$.

命题6.33.

拓扑空间 X 是 Hausdorff 的当且仅当 X 中每个收敛网的极限是唯一的.

命题6.34.

设 $f : X \to Y$ 是拓扑空间 X 到 Y 的映射, $x \in X$; 则 f 在 x 处连续当且仅当对每个收敛到 x 的网 (x_i), 有网 $(f(x_i))$ 收敛到 $f(x)$.

定义6.35.

设 D 和 E 是两个定向集, $N : E \to D, j \mapsto N_j$ 为一映射. 如果对每个 $n \in D$, 都存在 $m \in E$, 使得当 $j \succeq m$ 时, 有 $N_j \succeq n$, 则称 N 是**共尾映射**.

定义6.36.

设 $(x_i)_{i\in D}$ 和 $(y_j)_{j\in E}$ 是集合 X 中的网. 如果存在共尾映射 $N : E \to D, j \mapsto N_j$ 使得 $x_{N_j} = y_j$, 则称 $(y_j)_{j\in E}$ 是 $(x_i)_{i\in D}$ 的**子网**.

命题6.37.

设 (x_i) 是拓扑空间 X 中的网, $x \in X$. 若 $x_i \to x$, 则 (x_i) 的每个子网都收敛到 x.

命题6.38.

设 $(x_i)_{i\in D}$ 是拓扑空间 X 中的网; 则 x 是集合 $\{x_i : i \in D\}$ 的一个聚点当且仅当存在 (x_i) 的子网收敛到 x.

命题6.39.

拓扑空间 X 是紧的当且仅当 X 中每个网都有收敛子网.

6.6 一致空间

我们知道, 度量空间上的函数可以讨论一致连续性, 到度量空间的连续映射序列可以讨论一致收敛性; 这在一般的拓扑空间上是做不到的. 一致空间是度量空间的一种推广, 其上可以类似度量空间情形一样定义一致连续函数和函数列一致收敛等概念. 本节内容直接取自文献 [2] 的附录 (II).

设 X 是一个集合. 记 $\Delta := \{(x,x) :\in X\}$ 为 X 的对角线. 对 $\alpha, \beta \subset X \times X$, 记 $\alpha^{-1} := \{(x,y) : (y,x) \in \alpha\}$; $\alpha \circ \beta := \{(x,z) : \exists\ y \in X\ s.t.\ (x,y) \in \alpha$ 且 $(y,z) \in \beta\}$. 经常记 $\alpha^2 := \alpha \circ \alpha$. 若 $\alpha = \alpha^{-1}$, 则称 α 是**对称**的. 容易验证: $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$.

定义6.40.

集合 X 上的一个**一致结构**是指满足如下条件的 $X \times X$ 的子集族 $\mathcal{U}$:

(1) 对每个 $\alpha \in \mathcal{U}$, $\Delta \subset \alpha$;

(2) 对每个 $\alpha \in \mathcal{U}$ 及 $\beta \subset X \times X$, 若 $\alpha \subset \beta$, 则 $\beta \in \mathcal{U}$;

(3) 若 $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$, 则 $\alpha \cap \beta \in \mathcal{U}$;

(4) 若 $\alpha \in \mathcal{U}$, 则 $\alpha^{-1} \in \mathcal{U}$;

(5) 若 $\alpha \in \mathcal{U}$, 则存在 $\beta \in \mathcal{U}$ 使得 $\beta^2 \subset \alpha$.

注记6.41.

定义 6.40 中的条件 (1) – (3) 蕴含 $\mathcal{U}$ 是一个滤子 (见定义7.11); (5) 是对度量定义中三角不等式的替代.

定义6.42.

集合 X 上的一个**一致基**是指满足如下条件的 $X \times X$ 的子集族 $\mathcal{V}$:

(1) 对每个 $\alpha \in \mathcal{V}$, $\Delta \subset \alpha$;

(2) 若 $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$, 则存在 $\gamma \in \mathcal{V}$, 使得 $\gamma \subset \alpha \cap \beta$;

(3) 若 $\alpha \in \mathcal{V}$, 则存在 $\beta \in \mathcal{V}$, 使得 $\beta \subset \alpha^{-1}$;

(4) 若 $\alpha \in \mathcal{V}$, 则存在 $\beta \in \mathcal{V}$, 使得 $\beta^2 \subset \alpha$.

命题6.43.

若 $\mathcal{V}$ 是集合 X 上的一致基, 则集族 $\mathcal{U} := \{\beta :\ \exists\, \alpha \in \mathcal{V}\ s.t.\ \alpha \subset \beta\}$ 成为 X 的一个一致结构 (称为由 $\mathcal{V}$ **生成的一致结构**).

命题6.44.

若 $\mathcal{U}$ 是集合 X 上的一致结构, 则集族 $\mathcal{V} := \{\alpha \cap \alpha^{-1} : \alpha \in \mathcal{U}\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一致基.

例子6.14.

设 (X, d) 是度量空间. 对 $\epsilon > 0$, 令 $\alpha_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \epsilon\}$. 则集族 $\mathcal{V} := \{\alpha_\epsilon : \epsilon > 0\}$ 是一致基.

对 $\alpha \in \mathcal{U}$ 和 $x \in X$, 令 $\alpha(x) = \{y \in X : (x, y) \in \alpha\}$; 对 $S \subset X$, 令 $\alpha(S) = \cup_{x \in S}\alpha(x)$. 易见: $y \in \alpha(x)$ 当且仅当 $x \in \alpha^{-1}(y)$; $\alpha \circ \beta(x) = \alpha(\beta(x))$.

命题6.45.

若 $\mathcal{U}$ 是集合 X 上的一致结构, 则集族 $\mathcal{T} := \{U : \forall x \in U, \exists \alpha \in \mathcal{U}\ s.t.\ \alpha(x) \subset U\}$ 成为 X 的一个拓扑 (称为由 $\mathcal{U}$ 生成的**一致拓扑**).

命题6.46.

设 $\mathcal{U}$ 是集合 X 上的一致结构. 若 $x \in X$, 则对每个 $\alpha \in \mathcal{U}$, $\alpha(x)$ 是 x 的一致拓扑下的邻域.

证明.

设 $U = \{y \in \alpha(x) :\ \exists\ \beta \in \mathcal{U}\ s.t.\ \beta(y) \subset \alpha(x)\}$. 因 $x \in U$, 只要证 U 是一致拓扑下的开集. 事实上, 若 $\beta(y) \subset \alpha(x)$, 则存在 $\delta \in \mathcal{U}$ 使得 $\delta^2 \subset \beta$. 这样, 若 $z \in \delta(y)$, 则 $\delta(z) \subset \beta(y) \subset \alpha(x)$. 所以, $\delta(y) \subset U$. □

命题6.47.

若$\mathcal{U}$是集合X上的一致结构, 则每个$\alpha \in \mathcal{U}$都是Δ的邻域.

命题6.48.

若$\mathcal{U}$是集合X上的一致结构, 则$\mathcal{U}$生成的一致拓扑是Hausdorff的当且仅当$\cap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta$.

定理6.49.

设X是紧Hausdorff空间. 若$\mathcal{N}_\Delta$是Δ的所有邻域构成的集族, 则它是个一致结构并生成X的拓扑. 若$\mathcal{U}$是X的某个一致结构且生成X的拓扑, 则$\mathcal{U} = \mathcal{N}_\Delta$.

习题59.

开区间$(0,1)$上存在两个不同的一致结构, 但都生成$(0,1)$上自然的拓扑.

若一个拓扑空间X的拓扑可由其上的一个一致结构生成, 则称X是**可一致化**的.

命题6.50.

一致空间的任意乘积是可一致化的.

下面定理澄清了一致空间和度量空间之间的关系.

定理6.51.

Hausdorff空间X是可一致化的当且仅当它同胚于度量空间乘积的子空间.

定义6.52.

设X是带有一致结构$\mathcal{U}$的一致空间. 若函数$f : X \to \mathbb{R}$满足: 对每个$\epsilon > 0$, 都有$\alpha \in \mathcal{U}$, 使得$|f(x) - f(y)| < \epsilon$, $\forall (x,y) \in \alpha$, 则称f是**一致连续**的.

命题6.53.

紧Hausdorff空间X上的连续函数是一致连续的(关于X上唯一的一致结构).

定义6.54.

设A是一个集合, X是带有一致结构$\mathcal{U}$的一致空间, $f : A \to X$是一映射. 若(f_n)

是从 A 到 X 的一个映射的网并且满足对每个 $\alpha \in \mathcal{U}$, 存在指标 n_0, 当 $n > n_0$ 时, 成立 $(f_n(x), f(x)) \in \alpha$, 则称 (f_n) 一致收敛到 f.

命题6.55.

若 (f_n) 是从拓扑空间 X 到一致空间 Y 的连续映射网, 并且一致收敛到 $f : X \to Y$, 则 f 是连续的.

第 7 章 空间的紧化

7.1 局部紧性和单点紧化

本节中, 我们将给出局部紧和单点紧化的定义, 并对局部紧空间讨论单点紧化的存在性和唯一性.

定义7.1.

若拓扑空间 X 的每一点都存在一个紧邻域, 则称 X 是**局部紧**的.

显然, 紧空间是局部紧的.

例子7.1.

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是局部紧的.

例子7.2.

有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧的.

命题7.2.

若 X 是局部紧的, 则对每个 $x \in X$, 都存在由紧集构成的邻域基.

命题7.3.

局部紧空间的开子集和闭子集仍是局部紧的.

定义7.4.

若 Y 是紧 Hausdorff 空间, X 是 Y 的真子空间并且其闭包等于 Y, 则称 Y 为 X 的一个紧化. 若 $Y \setminus X$ 是单点集, 则称 Y 为 X 的**单点紧化**.

例子7.3.

$[0,1]$ 是 $(0,1)$ 的紧化, 是 $[0,1)$ 的单点紧化.

命题7.5.

设 X 是局部紧且非紧的 Hausdorff 空间, 则 X 存在唯一的单点紧化. (这里唯一性是指若 Y_1, Y_2 都是 X 的单点紧化, 则一定存在同胚 $h : Y_1 \to Y_2$ 满足 $h|_X = \mathrm{Id}_X$.)

证明.

设 $Y = X \sqcup \{\infty\}$. 设 $\mathcal{T}_X$ 是 X 的拓扑. 令 $\mathcal{T}_Y := \mathcal{T}_X \cup \{Y \setminus K : K是X的紧集\}$. 容易验证 $\mathcal{T}_Y$ 是一个拓扑.

断言1. $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 是紧 Hausdorff 的. 事实上, 任给 Y 的开覆盖 $\mathcal{B}$, 存在某个紧集 $K \subset X$ 使得 $\infty \in Y \setminus K \in \mathcal{B}$. 由 K 的紧性, 存在有限个 $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{B}$, 使得 $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$. 这样, $Y \subset (X \setminus K) \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$. 故 Y 是紧的. 对 $x \neq y \in Y$. 若 $x, y \in X$, 则由 X 的 Hausdorff 性可知 x 和 y 可被 X 中开集分离, 从而也被 Y 中开集分离. 若 $x \in X$, $y = \infty$. 因 X 是局部紧的, 故存在 x 的 X 中的开邻域 U 满足 $\overline{U}$ 是紧的. 这样 U 和 $Y \setminus \overline{U}$ 分离了 x 和 y. 所以, Y 是 Hausdorff 的.

断言2. $(X, \mathcal{T}_X)$ 是 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 的稠密子空间. 事实上, 由 $\mathcal{T}_Y$ 的定义, 对每个 $U \in \mathcal{T}_Y$, 或者 $U \in T_X$, 或者 $U = Y \setminus K$, 其中 K 是 X 的紧集. 这样, 总有 $U \cap X \in \mathcal{T}_X$. 又 $\mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}_Y$, 故 X 是 Y 的子空间. 任给 ∞ 的开邻域 $Y \setminus K$, 其中 K 是 X 的紧集; 因 X 非紧, 故 $X \cap (Y \setminus K) = X \setminus K \neq \emptyset$. 这样, X 在 Y 中稠密.

由断言 1 和断言 2, 知 Y 是 X 的单点紧化. 下证单点紧化的唯一性.

设 $Y_1 = X \cup \{\infty_1\}$ 和 $Y_2 = X \cup \{\infty_2\}$ 是 X 的两个单点紧化. 定义映射 $\phi : Y_1 \to Y_2$ 为: $\phi(x) = x$ $(\forall x \in X)$; $\phi(\infty_1) = \infty_2$. 任给 Y 的开集 U. 若 $U \subset X$, 则 $\phi(U) = U$ 是 Y_2 的开集. 若 $U = Y_1 \setminus K$ (其中 K 是 X 的紧集), 则 $\phi(U) = Y_2 \setminus K$ 为 Y_2 的开集. 这样 ϕ 是开

映射. 这样 ϕ^{-1} 是紧 Hausdorff 空间之间的连续双射; 进而是同胚. 单点紧化的唯一性得证. □

推论7.6.

Hausdorff 空间 X 是局部紧的当且仅当它同胚与一个紧 Hausdorff 空间的开子集.

例子7.4.

实直线 $\mathbb{R}$ 的单点紧化同胚于圆周.

7.2 Stone-Čech 紧化

本节中, 我们将给出 Stone-Čech 紧化的定义并讨论它的存在性和唯一性.

定义7.7.

设 X 是完全正则空间, Y 是 X 的一个紧化. 如果每个从 X 到紧 Hausdorff 空间 C 的连续映射都能唯一地扩张成从 Y 到 C 的连续映射,则称 Y 是 X 的 Stone-Čech **紧化**, 并记作 $\beta(X)$.

下面将证明完全正则空间的 Stone-Čech 紧化是存在且唯一的.

引理7.8.

设 X 是完全正则空间; 则存在 X 的紧化 Y 满足: 每个 X 上的有界连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 都能唯一地扩张到 Y 上.

证明.

设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 X 上的所有有界连续函数, 这里 J 是一个指标集. 对每个 $\alpha \in J$, 令 $I_\alpha := [\inf f_\alpha(X), \sup f_\alpha(X)]$. 定义映射 $\phi : X \to \prod_{\alpha\in J} I_\alpha, x \mapsto (f_\alpha(x))$. 因 X 是完全正则的, 则 X 上的连续函数分离点; 即对任何 $x \neq y \in X$, 存在 X 上的连续函数 f 使得 $f(x) \neq f(y)$. 这样 ϕ 是嵌入. 设 $Z = \overline{\phi(X)} \subset \prod_{\alpha\in J} I_\alpha$. 由 Tychonoff 定理, 知 Z 是紧的. 令 $Y := X \sqcup (Z \setminus \phi(X))$. 定义映射 $\eta : Y \to Z$ 为: 若 $x \in X$, 令 $\eta(x) = \phi(x)$;

若 $x \in Z \setminus \phi(X)$, 令 $\eta(x) = x$. 我们赋予 Y 如下拓扑: U 是 Y 的开集当且仅当 $\eta(U)$ 是 Z 的开集. 这样, $\eta : Y \to Z$ 是同胚; 特别地, Y 是 X 的一个紧化. 若 $f : X \to \mathbb{R}$ 是连续的, 则存在指标 α, 使得 $f = f_\alpha$. 设 π_α 为 Z 向 α 分量的投影. 则 $\pi_\alpha \circ \eta$ 即为 f 的扩张.

若 $f_1, f_2 : Y \to \mathbb{R}$ 都是 $f : X \to \mathbb{R}$ 的扩张, 则 $\{x \in Y : f_1(x) = f_2(x)\}$ 是 Y 闭集且包含 X. 而 X 在 Y 中稠密, 故 $f_1 = f_2$. 扩张的唯一性得证. □

定理7.9.

引理 7.8 中的紧化 Y 满足定义 7.7 中的性质.

证明.

设 C 是紧 Hausdorff 空间, 则它是完全正则的. 这样, 存在一个指标集 J 和嵌入 $\phi : C \to [0,1]^J$. 任给连续映射 $f : X \to C$. 对每个 $\alpha \in J$, 设 π_α为$[0,1]^J$ 向第 α 分量的投影. 由引理 7.8, 对每个 $\alpha \in J$, 存在 $g_\alpha : Y \to \mathbb{R}$, 其扩张 $\pi_\alpha \circ \phi \circ f$. 令 $\eta = \phi^{-1} \circ (g_\alpha)$. 则 η 扩张了 f. 扩张的唯一性的证明类似引理 7.8. □

定理7.10.

引理 7.8 中的紧化 Y 是唯一的 (如果 Y_1, Y_2 是两个这样的紧化, 则一定存在同胚 $h : Y_1 \to Y_2$ 满足 $h|_X = \mathrm{Id}_X$).

证明.

设 Y_1, Y_2 是 X 的两个满足引理 7.8 中条件的紧化. 考虑含入映射 $i_1 : X \to Y_1$ 和 $i_2 : X \to Y_2$. 设 $j_1 : Y_2 \to Y_1, j_2 : Y_1 \to Y_2$ 分别是 i_1, i_2 的扩张. 则 $j_1 \circ j_2 : Y_1 \to Y_1$ 和 $j_2 \circ j_1 : Y_2 \to Y_2$ 都是恒等映射 $id_X : X \to X$ 的扩张. 由扩张的唯一性, 得 $j_1 \circ j_2 = id_{Y_1}$, $j_2 \circ j_1 = id_{Y_2}$. 这样 j_1 是满足要求得同胚. □

7.3　离散空间的 Stone-Čech 紧化*

定义7.11.

设 D 是一个非空集合, $\mathcal{U}$ 是 D 的某些子集构成的一个非空集族. 如果 $\mathcal{U}$ 满足以下性质:

(1) 若 $A, B \in \mathcal{U}$, 则 $A \cap B \in \mathcal{U}$;

(2) 若 $A \in \mathcal{U}$ 且 $A \subset B \subset D$, 则 $B \in \mathcal{U}$;

(3) $\emptyset \notin \mathcal{U}$;

则称 $\mathcal{U}$ 是 D 上的一个**滤子**.

例子7.5.

设 X 是一拓扑空间且 $x \in X$; 则 x 的邻域全体构成一个滤子.

定义7.12.

若 $\mathcal{U}$ 是集合 D 上的一个滤子并且 $\mathcal{U}$ 不真包含于其它滤子之中, 则称 $\mathcal{U}$ 为一个**超滤子**.

定理7.13.

设 $\mathcal{U}$ 是集合 D 上的一个子集族; 则 $\mathcal{U}$ 是 D 上的超滤子当且仅当 $\mathcal{U}$ 是 D 上一个滤子并且对任意 $A \subset D$, 或者 $A \in \mathcal{U}$, 或者 $D \setminus A \in \mathcal{U}$.

证明.

($\Longrightarrow$) 假设存在$A \subset D$, 使得: $A \notin \mathcal{U}$且$D \setminus A \notin \mathcal{U}$; 则对任意$B \in \mathcal{U}$, 有$A \cap B \neq \emptyset$ (否则, 将有$B \subset D \setminus A \in \mathcal{U}$). 设$\mathcal{V} = \{C \subset D : 存在B \in \mathcal{U},满足\ C \supset A \cap B\}$. 容易检验$\mathcal{V}$是滤子且真包含$\mathcal{U}$. 这导致矛盾.

($\Longleftarrow$) 假设$\mathcal{U}$不是超滤子, 则存在真包含$\mathcal{U}$的滤子$\mathcal{V}$. 任取$A \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. 若$D \setminus A \in \mathcal{U}$, 则$D \setminus A \in \mathcal{V}$; 这与$\mathcal{V}$的滤子性矛盾. 所以必有$D \setminus A \notin \mathcal{U}$; 这又与题设矛盾. □

定理7.14.

设 $\mathcal{U}$ 是集合 D 上具有有限交性质的子集族; 则必存在 D 上的一个超滤子 p 使得 $\mathcal{U} \subset p$.

证明. 利用 Zorn 引理, 我们可以得到一个同时满足以下两点的在集族包含关系的极大元 $\mathcal{A}$: (1) $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$; (2) $\mathcal{A}$ 具有有限交性质. 若存在 $A \in \mathcal{U}$ 及 $B \subset D$ 使得 $A \subset B$, 则易见 $\mathcal{A} \cup \{B\}$ 仍具有有限交性质; 由 $\mathcal{A}$ 的极大性, 有 $B \in \mathcal{A}$; 这样 $\mathcal{A}$ 是滤子. 再由 $\mathcal{A}$ 的极大性知, 其为超滤子; 令 $p = \mathcal{A}$ 即可. □

设 D 是离散空间, $A \subset D$, $a \in D$. 我们用符号 $\beta(D)$ 表示集合 D 上的超滤子全体; 用 $\widehat{A}$ 表示包含 A 的超滤子全体, 即 $\widehat{A} = \{p \in \beta(D) : A \in p\}$.

下面命题的证明留作习题.

命题7.15.

设 D 是离散空间且 $A, B \subset D$. 则:

(1) $\widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$;

(2) $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$;

(3) $\widehat{D \setminus A} = \beta(D) \setminus \widehat{A}$;

(4) $\widehat{A} = \emptyset$当且仅当$A = \emptyset$; (5) $\widehat{A} = \beta(D)$ 当且仅当$A = D$;

(6) $\widehat{A} = \widehat{B}$当且仅当$A = B$.

定义7.16.

设 a 是集合 D 中一点. 称集族$\mathcal{U} = \{A \subset D : a \in A\}$ 为由a定义的**主超滤子** (容易检验$\mathcal{U}$ 是超滤子).

我们用 $e(a)$ 表示 a 所定义的主超滤子.下面我们总是赋予 $\beta(D)$ 以集族 $\{\widehat{A} : A \subset D\}$ 所生成的拓扑; 由命题 7.15(1) 知: $\{\widehat{A} : A \subset D\}$ 是其所生成拓扑的拓扑基.

定理7.17.

设 D 是离散空间且 $A \subset D$. 则:

(1) $\widehat{A}$ 是既开且闭集;

(2) $\beta(D)$ 是紧 Hausdorff 空间;

(3) $\widehat{A} = \overline{e(A)}$, 即 $p \in \overline{e(A)}$ 当且仅当 $A \in p$;

(4) $e : D \to \beta(D)$ 是嵌入;

(5) $e(D)$ 在 $\beta(D)$ 中稠密.

证明.

(1) 由 $\beta(D)$ 上拓扑的定义以及命题 7.15(3) 知 $\widehat{A}$ 是既开且闭的.

(2) 设 $p \neq q \in \beta(D)$. 若 $A \in p \setminus q$, 则 $D \setminus A \in q$. 于是, $\widehat{A}$ 和 $\widehat{D \setminus A}$ 是分别包含 p 和 q 的不交开集. 所以, $\beta(D)$ 是 Hausdorff 的. 由命题 7.15(3) 可见 $\beta(D)$ 中每个闭集都是形如 $\widehat{A}$ 这样的闭集的交. 因此, 为了证明 $\beta(D)$ 的紧性, 我们只要对由形如 $\widehat{A}$ 的集合组成的具有有限交性质的闭集族 $\mathcal{A}$, 证明 $\cap\mathcal{A} \neq \emptyset$ 即可. 为此, 考虑 $\mathcal{B} = \{A : \widehat{A} \in \mathcal{A}\}$. 由 7.15(1) 立见 $\mathcal{B}$ 是 D 的具有有限交性质的子集族. 于是, 根据定理 7.14, 存在 $p \in \beta(D)$ 使得 $\mathcal{B} \subset p$. 这样, $p \in \cap\mathcal{A}$.

(3) 显然, 对每个 $a \in A$, 有 $e(a) \in A$; 由 (1), 得 $\overline{e(A)} \subset \widehat{A}$. 为证反方向, 设 $p \in \widehat{A}$. 若 $p \in \widehat{B}$, 其中 $B \subset D$, 则 $B \in p$. 于是, $\emptyset \neq A \cap B \in p$. 任取 $a \in A \cap B$; 则 $e(a) \in e(A) \cap B$. 由 B 的任意性, 得 $p \in \overline{e(A)}$.

(4) 因 D 是离散的, 为证 e 是嵌入, 只要证 e 是单设. 事实上, 若 $a \neq b \in D$, 则 $D \setminus \{a\} \in e(b) \setminus e(a)$; 于是 $e(a) \neq e(b)$.

(5) 由 (3), 有 $\overline{e(D)} = \widehat{D}$. 由滤子定义, 知 $\beta(D) \subset \widehat{D}$. 显然, 总有 $\widehat{D} \subset \beta(D)$. 这样, $\overline{e(D)} = \beta(D)$.

□

定理7.18.

设 D 是离散空间, 则 $(e, \beta(D))$ 是 D 的 Stone-Čech 紧化.

证明.

由定理 7.17 知, $(e, \beta(D))$ 是 D 的一个紧化. 设 Y 是紧 Hausdorff 空间, $f : D \to Y$. 对每个 $p \in \beta(D)$, 设 $\mathcal{A}_p = \{\overline{f(A)} : A \in p\}$; 则 $\mathcal{A}_p$ 是 Y 的具有有限交性质的闭集族. 这样, $\cap\mathcal{A} \neq \emptyset$. 任取 $y \in \cap\mathcal{A}$, 并规定 $g(p) = y$. 下证: $f = g \circ e$ 且 g 连续.

设 $x \in D$; 则 $\{x\} \in e(x)$. 于是, $g(e(x)) \in \overline{\{f(x)\}} = \{f(x)\}$; 即 $g(e(x)) = f(x)$. 这样, $f = g \circ e$ 成立. 为证 g 的连续性, 设 $p \in \beta(D)$ 且 U 是 $g(p)$ 在 Y 中的开邻域. 由 Y 的正则性, 存在 $g(p)$ 的开邻域 V, 使得 $\overline{V} \subset U$. 设 $A = f^{-1}(V)$. 我们断定 $A \in p$; 否者 $D \setminus A \in p$, 进而 $g(p) \in \overline{f(D \setminus A)}$. 因 V 是 $g(p)$ 的开邻域, 故 $V \cap f(D \setminus A) \neq \emptyset$; 这与 $A = f^{-1}(V)$ 相矛盾. 所以, 断言成立, 即 $\widehat{A}$ 是 p 的开邻域. 我们进一步断定: $g(\widehat{A}) \subset U$. 否则, 设 $q \in \widehat{A}$,

但 $g(q) \notin U$. 这样, $Y \setminus \overline{V}$ 是 $g(q)$ 的开邻域; 而 $g(q) \in \overline{f(A)}$, 故 $(Y \setminus \overline{V}) \cap f(A) \neq \emptyset$; 这又与 $A = f^{-1}(V)$ 相矛盾. 这样, g 的连续性得证. 由定义7.7 知: $(e, \beta(D))$ 是 D 的Stone-Čech 紧化. □

注.

上面定理证明中 $y \in \cap\mathcal{A}$ 的选取虽然是任意的, 但事实上可以证明 $\cap\mathcal{A}$ 只能是单点集 (证明留作习题), 这样 y 的选取事实上是唯一的.

7.4 离散半群的Stone-Čech紧化*

若 $(S, \cdot)$ 是一半群并且 S 为一离散空间, 则称 $(S, \cdot)$ 为**一离散半群**.

定理7.19.

设 $(S, \cdot)$ 是一离散半群, 则 $\beta(S)$ 上存在唯一的二元运算 $*$ 满足以下几条:

(1) 对任意 $s, t \in S$, 成立 $s * t = s \cdot t$;

(2) 对每个 $q \in \beta(S)$, 映射 $\rho_q : \beta(S) \to \beta(S), p \mapsto p * q$ 连续;

(3) 对每个 $s \in S$, 映射 $\lambda_s : \beta(S) \to \beta(S), q \mapsto s * q$ 连续;

(4) $(\beta(S), *)$ 为一半群.

证明.

对 $s \in S$, 定义 $l_s : S \to S, t \mapsto s \cdot t$. 由定理7.18, 存在连续映射 $\lambda_s : \beta(S) \to \beta(S)$ 使得 $\lambda_s|_S = l_s$. 对 $q \in \beta(S)$, 定义 $r_q : S \to S, s \mapsto r_s(q)$. 再由定理7.18, 存在连续映射 $\rho_q : \beta(S) \to \beta(S)$, 使得 $\rho_q|_S = r_q|_S$. 定义运算 $* : \beta(S) \times \beta(S) \to \beta(S), (p, q) \mapsto \rho_q(p)$. 由以上定义过程立见: $*$ 满足 (1), (2), (3) 及唯一性.

下证 $*$ 满足结合律. 设 $p, q, r \in \beta(S)$; 则由 (1), (2), (3), 我们有:

$$(p \cdot q) \cdot r = \lim_{a \to p}(a \cdot q) \cdot r = \lim_{a \to p}\lim_{b \to q}(a \cdot b) \cdot r = \lim_{a \to p}\lim_{b \to q}\lim_{c \to r}(a \cdot b) \cdot c$$

及

$$p \cdot (q \cdot r) = \lim_{a \to p} a \cdot (q \cdot r) = \lim_{a \to p}\lim_{b \to q} a \cdot (b \cdot r) = \lim_{a \to p}\lim_{b \to q}\lim_{c \to r} a \cdot (b \cdot c).$$

所以, $(p\cdot q)\cdot r = p\cdot(q\cdot r)$; 运算 $*$ 的结合性成立. □

下面为了记号上的简便, 我们把上述定理中定义的运算“$*$”也记作“$\cdot$”. 对 $s\in S$ 及 $A\subset S$, 我们记 $s^{-1}A=\{t\in S: s\cdot t\in A\}$.

定理7.20.

设 $(S,\cdot)$ 是一离散半群且 $A\subset S$. 则

(1) 对每个 $s\in S$ 及 $q\in\beta(S)$, $A\in s\cdot q$ 当且仅当 $s^{-1}A\in q$. (2) 对任意 $p,q\in\beta(S)$, $A\in p\cdot q$ 当且仅当 $\{s\in S: s^{-1}A\in q\}\in p$.

证明.

(1)

$(\Longrightarrow)$ 设 $A\in s\cdot q$; 则 $\widehat{A}$ 是 $s\cdot q$ 的邻域. 由 λ_s 的连续性, 存在 $B\in q$, 成立 $\widehat{\lambda_s(B)}=\lambda_s(\widehat{B})\subset\widehat{A}$. 这样, 我们有 $\lambda_s(B)\subset A$; 即 $B\subset s^{-1}A$. 因 $B\in q$, 故由滤子性得 $s^{-1}A\in q$.

$(\Longleftarrow)$ 假设 $s^{-1}A\in q$, 但 $A\notin s\cdot q$; 则 $S\setminus A\in s\cdot q$. 类似于上一步的讨论, 得 $S\setminus s^{-1}A = s^{-1}(S\setminus A)\in q$. 这样, 由滤子性得 $\emptyset = s^{-1}A\cap(S\setminus s^{-1}A)\subset S$. 这导致矛盾.

(2)

$(\Longrightarrow)$ 设 $A\in p\cdot q$; 即 $p\cdot q\in\widehat{A}$. 由 ρ_q 的连续性, 存在 $B\in p$ 使得 $\widehat{\rho_q(B)}=\rho_q(\widehat{B})\subset\widehat{A}$. 这样, 对每个 $s\in B$, 有 $s\cdot q\in\widehat{A}$; 即 $A\in s\cdot q$. 于是, 由 (1) 得 $B\subset\{s: s^{-1}A\in q\}$. 再根据滤子性, 我们得到 $\{s\in S: s^{-1}A\in q\}\in p$.

$(\Longleftarrow)$ 假设 $A\notin p\cdot q$; 则 $S\setminus A\in p\cdot q$. 类似上一步的讨论, 得 $\{s\in S: S\setminus s^{-1}A\in q\} = \{s\in S: s^{-1}(S\setminus A)\in q\}\in p$. 这与 $\emptyset\notin p$ 相矛盾. □

设 $(S,\cdot)$ 为一半群, $e\in S$. 如果 $e\cdot e=e$, 则称 e 是**幂等元**.

定理7.21.

$(\beta(S),\cdot)$ 中一定含幂等元.

证明.

设 $\mathcal{A}=\{A\subset S: A\text{是非空紧的且}A\cdot A\subset A\}$. 利用 Zorn 引理可得: $\mathcal{A}$ 含有集合包含关系

下的一个极小元 M. 任取 $x \in M$. 由 M 的极小性以及 ρ_x 的连续性, 我们有 $M \cdot x = M$; 于是, 集合 $Y \equiv \{y \in M : y \cdot x = x\}$ 是非空闭集. 易见, $Y \cdot Y \subset Y$. 再由 M 的极小性, 得 $Y = M$. 这样, $x = x \cdot x$ 为幂等元. □

7.5 Hilbert 定理和 Schur 定理*

定理7.22.

设 S 是离散半群, p 是 $\beta(S)$ 中幂等元. 若 $A \in p$, 则必存在 S 中的某个序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 使得: $\mathrm{FP}((x_n)) \subset A$.

证明.

我们归纳地定义 S 中序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. 设 $A_1 = A, B_1 = \{x \in S : x^{-1}A_1 \in p\}$. 由 $A_1 \in p = p^2$ 及定理 7.20, 知 $B_1 \in p$. 任取 $x_1 \in A_1 \cap B_1$, 且设 $A_2 = A_1 \cap (x_1^{-1}A_1)$; 则 $A_2 \in p$. 假设对 $n \geq 1$, 我们已定义 x_n 和 $A_{n+1} \in p$. 设 $B_{n+1} = \{x \in S : x^{-1}A_{n+1} \in p\}$. 再由 $A_{n+1} \in p = p^2$ 及定理 7.20, 知 $B_{n+1} \in p$. 任取 $x_{n+1} \in B_{n+1} \cap A_{n+1}$, 并设 $A_{n+2} = A_{n+1} \cap (x_{n+1}^{-1}A_{n+1})$; 则 $A_{n+2} \in p$. 容易验证这样得到的 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 满足要求. □

引理7.23.

设 D 是离散空间, $\mathcal{U}$ 是其上的超滤子, $A_1, ..., A_n$ 是 D 的 n 个子集 $(n \in \mathbb{N})$. 若 $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U}$, 则必有某个 $i \in \{1, ..., n\}$ 使得: $A_i \in \mathcal{U}$.

证明.

假设对每个 $i \in \{1, ..., n\}$, 都有 $A_i \notin \mathcal{U}$; 由定理 7.13 知, 对每个 i 成立: $S \setminus A_i \in \mathcal{U}$. 因 $\mathcal{U}$ 是滤子, 所以 $\cap_{i=1}^{n}(D \setminus A_i) \in \mathcal{U}$; 于是, $\cup_{i=1}^{n} A_i = D \setminus \cap_{i=1}^{n}(D \setminus A_i) \notin \mathcal{U}$. 这导致矛盾. □

定理 7.21, 定理 7.22, 和引理 7.23 一起蕴含下面定理.

定理7.24.

设 S 是一半群, 且 $S = \cup_{i=1}^{m} A_i$, 其中 $m \in \mathbb{Z}_+$. 则存在某个 $i \in \{1, ..., m\}$ 及 S 中的某个序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 使得: $\mathrm{FP}((x_n)) \subset A_i$.

下面两个推论是直接的.

推论7.25 (Hilbert 定理).

设 $\mathbb{Z}_+ = \cup_{i=1}^m A_i$, 其中 $m \in \mathbb{N}$. 则对每个 $k \in \mathbb{Z}_+$, 都存在 $i \in \{1, ..., m\}$, $\mathbb{Z}_+$ 中序列 $(x_n)_{n=1}^k$, 以及 $\mathbb{Z}_+$ 中无限集 B, 使得: 对每个 $b \in B$, 成立 $b + \mathrm{FS}((x_n)_{n=1}^k) \subset A_i$.

推论7.26 (Schur 定理).

设 $\mathbb{N} = \cup_{i=1}^m A_i$, 其中 $m \in \mathbb{Z}_+$. 则存在 $i \in \{1, ..., m\}$ 及 $x, y \in \mathbb{Z}_+$, 使得: $\{x, y, x+y\} \subset A_i$.

就作者所知, 下面问题还是公开的. 近期的一个重要进展见 [13].

问题7.27.

设 $\mathbb{Z}_+ = \cup_{i=1}^m A_i$, 其中 $m \in \mathbb{Z}_+$. 问: 是否存在 $i \in \{1, ..., m\}$ 及 $x, y \in \mathbb{Z}_+$, 使得: $\{x, y, x + y, xy\} \subset A_i$?

第 8 章　映射空间的拓扑

8.1　点开拓扑和紧开拓扑

设 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 是两个拓扑空间. 我们用 $C(X, Y)$ 表示从 X 到 Y 的连续映射全体.

定义8.1.

给定 $x \in X$ 和 Y 的开集 U. 令 $S(x, U) = \{f : f \in Y^X 且 f(x) \in U\}$. 我们称由集族 $\{S(x, U) : x \in X, U \in \mathcal{T}_Y\}$ 生成的拓扑为 Y^X 上的**点开拓扑**.

习题60.

集族 $\{S(x, U) : x \in X, U \in \mathcal{T}_Y\}$ 构成其生成拓扑的拓扑子基.

命题8.2.

Y^X 上的点开拓扑与乘积拓扑一致.

命题8.3.

点开拓扑下, Y^X 中的网 (f_α) 收敛到 f 当且仅当对每个 $x \in X$, 有 $f_\alpha(x) \to f(x)$.

由命题 8.3, 我们也称点开拓扑为**点态收敛拓扑**.

习题61.

请说明: 点开拓扑下, $C(X, Y)$ 一般不是 Y^X 的闭子集.

定义8.4.

对于 X 的紧集 K 和 Y 的开集 U, 令 $S(K, U) = \{f : f \in Y^X 且 f(K) \subset U\}$. 我们称由集族 $\{S(K, U) : K是X中紧集, U \in \mathcal{T}_Y\}$ 生成的拓扑为 Y^X 上的**紧开拓扑**.

习题62.

集族 $\{S(K, U) : K是X中紧集, U \in \mathcal{T}_Y\}$ 是其生成拓扑的拓扑子基.

定义8.5.

设 (Y,d) 是度量空间. 对 X 中紧集 K, $\epsilon > 0$, 及 $f \in Y^X$, 令 $S(K,f,\epsilon) = \{g \in Y^X : d(g(x),f(x)) < \epsilon,\ \forall x \in K\}$. 我们称由集族 $\{S(K,f,\epsilon) : K\text{是}X\text{中紧集}, f \in Y^X, \epsilon > 0\}$ 生成的拓扑为 Y^X 上的**紧收敛拓扑**.

习题63.

集族 $\{S(K,f,\epsilon) : K\text{是}X\text{中紧集}, f \in Y^X, \epsilon > 0\}$ 是其生成拓扑的拓扑子基.

命题8.6.

设 Y 是度量空间. 则 Y^X 上的紧开拓扑和紧收敛拓扑是一致的.

设 A 是一个集合, (Y,d) 是一个度量空间, (f_α) 是 Y^A 中的网, 且 $f \in Y^A$. 如果对每个 $\epsilon > 0$, 都存在 β, 使得当 $\alpha > \beta$ 时, 对任意 x 成立 $|f_\alpha(x) - f(x)| < \epsilon$, 则称 (f_α)**一致收敛**到 f. 紧收敛拓扑的意义在下面命题中得到体现.

命题8.7.

设 Y 是度量空间, (f_α) 是 $C(X,Y)$ 中的网, $f \in C(X,Y)$. 则在紧开拓扑下, (f_α) 收敛到 f 当且仅当对 X 中每个紧集 K, 有 $f_\alpha|_K$ 一致收敛到 $f|_K$.

推论8.8.

设 X 是紧空间, Y 是度量空间, (f_α) 是 $C(X,Y)$ 中的网, $f \in C(X,Y)$. 则在紧开拓扑下, (f_α) 收敛到 f 当且仅当 f_α 一致收敛到 f.

命题8.9.

设 X 是拓扑空间, Y 是度量空间; (f_α) 是 $C(X,Y)$ 中的网, $f \in Y^X$. 若 (f_α) 一致收敛到 f, 则 $f \in C(X,Y)$.

命题8.10.

设 X 是局部紧空间, Y 是度量空间. 则在紧开拓扑下, $C(X,Y)$ 是 Y^X 的闭子集.

证明.

设 $f \in Y^x$ 位于 $C(X,Y)$ 在紧开拓扑的闭包中; 则存在网 $(f_\alpha) \in C(X,Y)$ 在紧开拓扑下

收敛到 f. 任给 $x \in X$, 由局部紧性, 存在 x 的紧邻域 K. 根据命题8.7, $(f_\alpha|_K)$ 一致收敛到 f_K. 再由命题8.9, 知 $f|_K$ 是连续的; 特别地, f 在 x 处连续. 由 x 的任意性, f 是连续的. □

8.2 Ascoli定理

定义8.11.

设 X 是拓扑空间, (Y,d) 是度量空间; $F \subset C(X,Y)$; $x_0 \in X$. 如果对每个 $\epsilon > 0$, 都存在 x_0 的邻域 U, 使得对每个 $f \in F$ 和每个 $y \in U$ 成立 $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, 则称映射集 F 在 x 处等度连续. 如果 F 在每个 $x \in X$ 处等度连续, 则称 F 是**等度连续**的.

定理8.12 (Ascoli 定理).

设 X 是拓扑空间, (Y,d) 是度量空间, $F \subset C(X,Y)$. 若 F 是等度连续的并且对每个 $x \in X$, 闭包 $\overline{\{f(x) : f \in F\}}$ 是 Y 的紧集, 则在紧开拓扑下, F 的闭包是 $C(X,Y)$ 的紧集.

证明.

我们分别用 $Cl_p(F)$ 和 $Cl_c(F)$ 表示 F 在点开拓扑和紧开拓扑下的闭包. 对每个 $x \in X$, 令 $I_x = \overline{\{f(x) : f \in F\}}$; 则 I_x 是 Y 的紧集. 而 $Cl_p(F) \subset \prod_{x\in X} I_x$, 故 $Cl_p(F)$ 是 Y^X 在点开拓扑下的紧集.

断言1. $Cl_p(F)$ 是等度连续的. 事实上, 任给 $x \in X$ 和 $\epsilon > 0$, 由 F 的等度连续性, 存在 x 的邻域 U 使得对每个 $y \in U$ 成立 $d(f(x), f(y)) < \epsilon/3$ $(\forall f \in F)$. 这样, 对 $g \in Cl_p(F)$ 及 $y' \in U$, 存在 $f' \in F$ 使得 $d(g(y'), f'(y')) < \epsilon/3$ 且 $d(g(x), f'(x)) < \epsilon/3$. 于是,

$$d(g(y'), g(x)) \leq d(g(y'), f'(y')) + d(f'(y'), f'(x)) + d(f'(x), g(x)) < \epsilon.$$

断言2. $Cl_p(F)$ 的点开拓扑和紧开拓扑一致. 显然紧开拓扑比点开拓扑细, 我们只要证反方向. 设 $Cl_p(F)$ 中的网 (g_α) 点点收敛到 $g \in Cl_p(F)$. 下证 (g_α) 在紧开拓扑下收敛到 g. 任给 X 的紧集 K 和 $\epsilon > 0$. 对 $x \in K$, 由断言1, 存在 x 的邻域 U_x 使得对每个 $y \in U_x$, $d(g(x), g(y)) < \epsilon/3$ $(\forall g \in Cl_p(F))$. 由 K 的紧性, 存在 $x_1, \cdots, x_n \in K$ 使得 $K \subset \cup_{i=1}^n U_{x_i}$.

设 β 满足当 $\alpha > \beta$ 时, $d(g_\alpha(x_i), g(x_i)) < \epsilon/3$ ($\forall i = 1, \cdots, n$). 任给 $y \in K$; 设 $y \in U_{x_i}$, 其中 $i \in \{1, \cdots, n\}$. 则当 $\alpha > \beta$ 时,

$$d(g_\alpha(y), g(y)) \leq d(g_\alpha(y), g_\alpha(x_i)) + d(g_\alpha(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(y)) < \epsilon.$$

这样, $g_\alpha|_K$ 一致收敛到 $g|_K$.

由断言2, 知 $\mathrm{Cl}_p(F)$ 是紧的. □

8.3 等度连续系统和 Halmos-von Neumann 定理*

定义8.13.

设 G 是一个群. 对 $a \in G$, 定义 $L_a, R_a : G \to G$ 为: $L_a(x) = ax, R_a(x) = xa, \forall x \in G$. 我们分别称 L_a 和 R_a 为群 G 的**左平移**和**右平移**.

定义8.14.

设 G 是拓扑空间也是群. 如果乘法 $m : G \times G \to G, (x, y) \mapsto xy$ 和取逆 $\tau : G \to G, x \mapsto x^{-1}$ 是连续的, 则称 G 是**拓扑群**; 如果拓扑群 G 作为拓扑空间是紧的 (相应地, 可度量化的), 则称 G 是**紧拓扑群** (相应地, **可度量拓扑群**).

命题8.15.

设 G 是拓扑群. 对于 $a \in G$, 平移 L_a 和 R_a 都是 G 的同胚.

从命题 8.15 可见, (G, L_a) 和 (G, R_a) 分别构成可逆系统.

例子8.1.

关于欧式度量所诱导的拓扑和向量的加法运算, $\mathbb{R}^n$ 成为交换拓扑群.

例子8.2.

环面 $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ $(n > 0)$ 在商拓扑下成为紧交换群.

例子8.3.

一般线性群 $GL(n, \mathbb{R})$ $(n > 0)$ 关于 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的子空间拓扑成为拓扑群.

例子8.4.

正交群 $O(n,\mathbb{R})$ $(n>0)$ 关于 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的子空间拓扑成为紧群.

例子8.5.

设 $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为圆周群. 则乘积群 $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}_+}$ 关于乘积拓扑成为紧交换拓扑群.

例子8.6.

2-进螺线管在 $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}_+}$ 的子空间拓扑和群运算下成为紧交换群.

例子8.7.

赋予 $\{0,1\}$ 离散拓扑. 则乘积空间 $\Sigma:=\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 在进位加法运算下成为紧交换群.

定义8.16.

设 $T:X\to X$ 是紧度量空间 X 上的同胚. 若 $\{T^n:n\in\mathbb{Z}\}$ 是等度连续的, 则称系统 (X,T) 是等度连续的.

命题8.17.

设 $T:X\to X$ 是紧度量空间 X 上的同胚. 若系统 (X,T) 是等度连续且点传递的, 则它是极小的.

例子8.8.

设 $0<a<b<1$ 满足: 不存在整数 m,n 使得 $ma+nb\in\mathbb{Z}$. 则系统 $(\mathbb{T}^2,L_{(a,b)})$ 是极小等度连续的.

例子8.9.

设 Σ 如例 8.7, $a=(1,0,0,\cdots)\in\Sigma$. 则系统 (Σ,L_a) 是极小等度连续的.

定理8.18 (Halmos-von Neumann 定理).

设 X 是紧度量空间, $T:X\to X$ 是同胚. 若系统 (X,T) 是等度连续且极小的, 则它与一个紧拓扑群上的平移生成的系统拓扑共轭.

证明.

设 $F = \{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$. 令 $H \subset C(X,X)$ 为 F 在紧开拓扑下的闭包. 由 Ascoli 定理, H 在紧开拓扑下是紧的. 不难验证 H 在映射符合下成为紧交换拓扑群. 固定一个传递点 $x \in X$. 设 $\phi : H \to X, g \mapsto g(x)$. 易见, ϕ 是连续的. 设 $L_T : H \to H, g \mapsto T \circ g$ 为 H 的左平移; 则 $\phi(L_T g) = T \circ g(x) = T(\phi(g))$. 这样, $\phi(H)$ 是 X 的 T 不变闭集. 由 (X,T) 的极小性, $X = \phi(H)$. 所以, ϕ 是 (H, L_T) 到 (X,T) 的因子映射. 为证 ϕ 是拓扑共轭, 只要证 ϕ 是单射. 若对 $g_1, g_2 \in H$, 有 $\phi(g_1) = \phi(g_2)$; 即 $g_1(x) = g_2(x)$. 由 H 的交换性, 有 $g_1(g(x)) = g_2(g(x))$, $(\forall g \in H)$. 而 $\{g(x) : g \in H\} = X$, 故 $g_1 = g_2$. 这样, ϕ 是单的. □

8.4 Distal 系统和 Ellis 半群*

本节中, 我们总是假定 $T : X \to X$ 是紧度量空间 (X,d) 上的同胚.

定义8.19.

若对任意 $x \neq y \in X$, 有 $\inf\{d(T^n(x), T^n(y)) : n \in \mathbb{Z}\} > 0$, 则称系统 (X,T) 是 **distal** 的.

命题8.20.

若系统 (X,T) 是等度连续的, 则它是 distal 的.

例子8.10.

设 $D := \{re^{\mathrm{i}\theta} : 0 \leq r \leq 1, \theta \in \mathbb{R}\}$ 是复平面内单位圆周. 考虑同胚 $f : D \to D, re^{\mathrm{i}\theta} \mapsto re^{\mathrm{i}(\theta+r)}$. 则可逆系统 (D,f) 是 distal 而非等度连续的.

例子8.11.

设 α 是无理数. 考虑同胚 $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, (x,y) \mapsto (x+\alpha, y+x)$. 则可逆系统 $(\mathbb{T}^2, f)$ 是极小distal 而非等度连续的.

命题8.21.

设 $E(X,T) \subset X^X$ 是 $\{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$ 在点开拓扑下的闭包. 则 $E(X,T)$ 在映射复合下成为

半群, 并且满足: 对每个 $s \in E(X,T)$, 右乘 $\rho_s : E(X,T) \to E(X,T), t \mapsto ts$ 连续; 对每个 $s \in \{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$, 左乘 $\lambda_s : E(X,T) \to E(X,T), t \mapsto st$ 连续.

证明.

设 $F = \{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$. 任给 $\xi, \eta \in E(X,T)$ 和 $t \in F$; 则存在 F 中的网 (f_α) 和 (g_β) 分别收敛到 ξ 和 η. 于是, 对每个 $x \in X$, 有 $t\xi(x) = t \lim f_\alpha(x) = \lim t f_\alpha(x)$. 而 $tf_\alpha \in F$, 故 $t\xi \in E(X,T)$; 特别地, $g_\beta \xi \in E(X,T)$ $(\forall \beta)$. 这样, $\eta\xi = \lim g_\beta \xi \in E(X,T)$. 所以, $E(X,T)$ 在映射符合下成为半群. 右乘 ρ_s $(s \in E(X,T))$ 及左乘 λ_s $(s \in F)$ 的连续性从点开拓扑定义立即可得. □

定义8.22.

我们称命题 8.21 中的 $E(X,T)$ 为动力系统 (X,T) 的 Ellis 半群. 若 I 是 $E(X,T)$ 中非空闭集且满足 $E(X,T)I \subset I$, 则称 I 是 $E(X,T)$ 的一个**右理想**; 若右理想 I 在集合包含关系下达到极小 (即不存在真含于I的右理想), 则称 I 是**极小右理想**.

从命题 8.21 我们看到 $(E(X,T), \lambda_T)$ 成为一个动力系统.

命题8.23.

I是$E(X,T)$的极小右理想当且仅当它是系统$(E(X,T), \lambda_T)$的极小集; 特别地, $E(X,T)$ 总存在极小右理想.

下面命题的证明与定理 7.21 的证明类似.

命题8.24.

若 I 是 $E(X,T)$ 的极小右理想, 则它必含幂等元.

命题8.25.

若系统 (X,T) 是 distal 的且 u 是 $E(X,T)$ 的幂等元, 则对每个 $x \in X$, 有 $ux = x$.

证明.

设 (f_α) 为 $\{T^n : n \in \mathbb{Z}\}$ 中的网且 $\lim f_\alpha = u$. 因 $u^2 = u$, 故 $u(u(x)) = u(x)$. 这样, $\lim f_\alpha(u(x)) = \lim f_\alpha(x)$. 而 (X,T) 是 distal 的, 故 $u(x) = x$. □

定理8.26.

若系统 (X,T) 是 distal 的, 则它是点点几乎周期的 (即 X 是极小集的不交并).

证明.

任给 $x \in X$. 令 $Y = E(X,T)x$; 则 Y 是包含 x 的 T 不变闭集. 考虑映射 $\phi : E(X,T) \to X, \xi \to \xi(x)$; 则 ϕ 是系统 $(E(X,T), \lambda_T)$ 到 $(Y, T|_Y)$ 的因子映射. 由命题 8.23, 可取 I 为 $E(X,T)$ 的一个极小右理想. 于是, Ix 为 (X,T) 的一个极小集. 再由命题 8.24 和命题 8.25, 知 $x \in Ix$. 这样, x 是几乎周期的. □

8.5 基数和序数*

若 A 和 B 是任意两个集合, 则 $A \in B$ 或 $A \notin B$ 两者成立且只能成立其一. 如果所有集合的全体仍是一个集合, 那么当我们考虑它的子集 $X := \{集合x : x \notin x\}$ 时, 会出现这样的悖论: 若 $X \in X$, 则有 $X \notin X$; 若 $X \notin X$, 则$X \in X$. 为了避免这样的悖论发生, 我们不将所有集合的全体看做集合. 公理集合论中, 诸如"所有集合的全体"这样的对象被称为**类**; 对任意两个类 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ 或 $\mathcal{A} \notin \mathcal{B}$ 两者成立且只能成立其一; 若类 $\mathcal{A}$ 是某个类 $\mathcal{B}$ 的元素, 则称类 $\mathcal{A}$ 是一个**集合**. 对于集合的子集、交并运算、偏序全序关系等概念都可以自然扩充到类上. 我们将在较为朴素的意义下使用"集合"和"类"的概念.

定义8.27.

设 A 和 B 是两个集合. 如果存在双射 $f : A \to B$, 则称 A 和 B 是**等势**的.

易见, 等势关系是集合间的等价关系.

定义8.28.

每个集合关于等势关系的等价类称为一个**基数**.

我们用 $|A|$ 表示集合 A 的基数.

定义8.29.

如果集合 A 与集合 B 的一个子集等势, 但不与 B 等势, 则称 A 的基数**小于** B 的基数; 记作 $|A| < |B|$.

显然, 上面的定义是一个良定义(与代表元 A 和 B 的选取无关).

命题8.30.

设 A 是一个非空集合, 2^A 是它的幂集 (即 A 的所有子集构成的集合); 则 $|A| < |2^A|$.

证明.

显然 A 与 2^A 的一个子集等势. 只要证不存在 A 到 2^A 的满射即可. 否则, 设 $f : A \to 2^A$ 是满射. 考虑集合 $B := \{x \in A : x \notin f(x)\}$; 则 $B \in 2^A$. 故存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = B$. 但这导致矛盾:

$$a \in B \Longleftrightarrow a \notin f(a) \Longleftrightarrow a \notin B.$$

□

定义8.31.

设 $<$ 是集合 X 上的一个全序. 若 $a \in A \subset X$ 满足: 对每个 $b \in A, b \neq a$, 有 $a < b$, 则称 a 是 A 的**最小元**. 如果 X 的每个非空子集都有最小元, 则称 $(X, <)$ 是**良序集**.

例子8.12.

关于实数的小于关系 $<$, $(\mathbb{N}, <)$ 是良序的, 而 $(\mathbb{Q}, <)$ 不是良序的.

下面的良序公理与选择公理等价.

公理3 (良序公理).

每个集合都是可良序的 (即其上存在一个良序).

定义8.32.

设 $(A, <)$ 和 $(B, \prec)$ 是两个良序集. 如果存在双射 $f : A \to B$ 满足: 对任意 $x, y \in A$, $x < y$ 当且仅当 $f(x) \prec f(y)$, 则称 $(A, <)$ 和 $(B, \prec)$ 是**序同构**的.

显然, 序同构是所有良序集的类上的等价关系.

定义8.33.

每个良序集关于序同构的等价类称为一个**序数**.

下面我们要对所有序数和基数定义一类代表元.

定义8.34.

如果集合 X 中每个元都是 X 的子集, 则称 X 是**传递集**. 如果传递集 X 关于 $\in$ 成为良序集, 我们称 $(X, \in)$ 为一个**序代表**.

我们用 Ord 表示所有序代表的类; 用小写希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, ...$ 等表示序代表.

引理8.35.

关于 Ord 和 $\in$, 下面结论成立:

(1) $\emptyset$ 是一个序代表.

(2) 若 α 是一个序代表且 $\beta \in \alpha$, 则 β 是一个序代表.

(3) 若 $\alpha \neq \beta$ 是序代表且 $\alpha \subset \beta$, 则 $\alpha \in \beta$.

(4) 若 α, β 是序代表, 则或者 $\alpha \subset \beta$, 或者 $\beta \subset \alpha$.

证明.

(1) 显然.

(2) 由序代表的定义, $\beta \subset \alpha$; 特别地, $(\beta, \in)$ 是良序的. 下证 β 是传递集. 任给 $B \in \beta$ 及 $b \in B$. 注意到 $B \in \alpha$, 故 $B \subset \alpha$. 于是, $b \in \alpha$. 因 $(\alpha, \in)$ 是全序集, 故 $b \in \beta$. 这样, $B \subset \beta$ 得证.

(3) 设 γ 是 $\beta \setminus \alpha$ 的最小元; 则对每个 $r \in \gamma$ 有 $r \in \alpha$; 于是 $\gamma \subset \alpha$. 任给 $a \in \alpha$, 由传递性, 我们有 $a \subset \alpha$; 这样, $\gamma \notin a$. 又 $a \in \beta$, 由全序的定义, 我们有 $a \in \gamma$. 于是, $\alpha = \gamma \in \beta$.

(4) 显然 $\alpha \cap \beta$ 是一个序代表. 设 $\gamma = \alpha \cap \beta$; 则 $\gamma = \alpha$ 或 $\gamma = \beta$; 即 $\alpha \subset \beta$ 或 $\beta \subset \alpha$. 否者, 由(3), $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$. 矛盾. □

注记8.36.

由引理8.35的(1)和(3)知: 若序代表 $\beta \neq \emptyset$, 则 $\emptyset \in \beta$.

定义8.37.

设 $<$ 是集合 X 上一个全序, $A \subset X$. 若 x 是 A 的最小上界, 则称 x 是 A 的**上确界**; 记作 $x = \sup A$. 若 x 是 A 的最大下界, 则称 x 是 A 的**下确界**; 记作 $x = \inf A$.

下面命题可由引理8.35直接推出.

命题8.38. 关于 Ord 和 $\in$, 下面结论成立:

(1) $\in$ 是 Ord 上的全序.

(2) 对每个 α, $\alpha = \{\beta : \beta \in \alpha\}$.

(3) 若 C 是一个序代表的非空类, 则 $\cap C$ 也是一个序代表, 且 $\inf C = \cap C \in C$.

(4) 若 C 是一个序代表的非空类, 则 $\cup C$ 也是一个序代表, 且 $\sup C = \cup C$.

(5) 若 α 是一个序代表, 则 $\alpha \cup \{\alpha\}$ 也是序代表, 且 $\alpha \cup \{\alpha\} = \inf\{\beta : \alpha \in \beta\}$.

为证明这一节的主要定理, 我们先准备两个引理.

引理8.39.

设 $(X, <)$ 是良序集, $f : X \to X$ 是保序映射 $(a < b \Longrightarrow f(a) < f(b))$; 则 $f(x) \geq x$ $(\forall x \in X)$.

证明.

假设 $A := \{x \in X : f(x) < x\} \neq \emptyset$; 则存在 A 的最小元 a. 这样, $f(a) < a$. 于是 $f(f(a)) < f(a)$. 所以 $f(a) \in A$. 这与 a 的最小性相矛盾. □

引理8.40.

设 $(X, <)$ 是良序集, $x \in X$. 设 $Y = \{y \in X : y < x\}$. 则 $(X, <)$ 与 $(Y, <)$ 不是序同构的.

证明.

假设 $\phi : X \to Y$ 是一个序同构; 则 $\phi(x) \in Y$. 于是, $\phi(x) < x$. 这与引理8.39相矛盾. □

定理8.41.

若 $\alpha \neq \beta$, 则 α 与 β 不是序同构的; 每个良序集恰与一个序代表序同构.

证明.

第一个结论直接由引理 8.40 推出. 任给良序集 $(X,<)$. 对 $x \in X$, 令 $Y_x = \{y \in X : y < x\}$. 考虑集合 $Z := \{x \in X : (Y_x,<)$ 序同构于某个序代表 $\alpha_x\}$. 若 a 是 X 的最小元, 则 $Y_a = \emptyset$; 这样, $Z \neq \emptyset$. 下证 $Z = X$. 否者, 设 z 是 $X \setminus Z$ 的最小元. 则映射 $x \mapsto \alpha_x$ 是 $(Y_z,<)$ 与序代表 $(\{\alpha_x\}_{x\in Z},\in)$ 的序同构; 矛盾. 所以 $Z = X$. 这样, $(X,<)$ 与序代表 $(\{\alpha_x\}_{x\in X},\in)$ 序同构. □

从定理 8.41 可见, 所有序代表恰构成序数的所有代表元. 下面我们不再区分序代表和它所代表的序数.

定义8.42.

对于序数 α, 我们定义 $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$, 并称其为 α 的**后继序数**. 若 α 不是任何序数的后继序数, 则称其为**极限序数**; 这时, 我们有 $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.

由引理 8.35, 我们知 $\emptyset$ 是最小的序数. 记 $0 := \emptyset$, $1 := 0+1 = \{\emptyset\}$, $2 := 1+1 = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, $3 := 2+1 = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \cdots$; 我们用 ω_0 记第一个无限序数 (必可数); 用 ω_1 记第一个不可数序数. 这样我们有:

$$0<1<2<\cdots<\omega_0<\omega_0+1<\omega_0+2<\cdots<\omega_1<\omega_1+1<\omega_1+2<\cdots.$$

定义8.43.

如果序数 α 不与比它小的任何序数等势, 则称 α 是一**初始序数**.

定理8.44.

若 $\alpha<\beta$ 是两个不同的初始序数, 则 $|\alpha| \neq |\beta|$; 每个集合都与一个初始序数等势.

证明.

由初始序数的定义, 知第一个论断成立. 第二个论断由良序公理立即可得. □

从定理 8.44, 我们看到初始序数恰好构成所有基数的代表元. 我们用 $\aleph_0$ 表示 ω_0 的势, 用 $\aleph_1$ 表示 ω_1 的势, 用 c 表示连续统的势 (即自然数集的幂集或实数集的势). 下面是

著名的 Cantor **连续统假设**:

$$c = \omega_1.$$

该假设不能在目前通行的集合论公理系统 (称作 ZFC **公理系统**) 内证真或证伪; 即它与 ZFC 公理系统独立.

命题8.45.

可分度量空间的势不超过连续统的势.

定理8.46 (超限归纳原理).

设 C 是一个序数构成的类且满足以下条件:

(1) $0 \in C$,

(2) 若 $\alpha \in C$, 则 $\alpha + 1 \in C$,

(3) 若 α 是非零极限序数且对每个 $\beta < \alpha$ 有 $\beta \in C$, 则 $\alpha \in C$;

则 C 是所有序数的类.

注记8.47.

我们通常以这样的方式使用超限归纳原理: 当我们要对每个序数定义一类数学对象 (相应地, 证明一个数学命题) 时, 只要保证:

(1) 对 $\alpha = 0$ 已定义 (相应地, 证明);

(2) 如果对所有 $< \alpha$ 的序数都已定义 (相应地, 证明), 就能对 α 定义 (相应地, 证明);

那么就能够对所有的序数定义 (相应地, 证明). 步骤(2)中通常要对α是后继续数和极限序数两种情况分别讨论.

下面我们用超限归纳原理重新证明命题 4.45.

命题8.48.

若 $f : X \to X$ 是紧集 X 上的连续映射, 则 (X, f) 一定有极小集.

证明.

假设命题不成立. 对每个序数 α, 我们归纳地定义 (X, f) 的非空不变闭集 A_α. 令 $A_0 = X$.

假设对 $\beta < \alpha$, A_β 已定义. 若 $\alpha = \gamma + 1$ 是一后继序数, 则由假设存在 A_γ 的 f 不变真闭子集 K; 令 $A_\alpha = K$. 若 α 是极限序数, 则令 $A_\alpha = \cap_{\beta<\alpha} A_\beta$; 由有限交性质, A_α 是 f 不变的非空闭集. 由构造过程, 对每个序数 α, 可取 $x_\alpha \in A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$. 因 $\{x_\alpha\}$ 两两不同, 这蕴含 X 的势可以任意大. 矛盾. □

8.6 Furstenberg 结构定理*

本节中, 我们介绍关于极小 distal 系统的 Furstenberg 结构定理.

定义8.49.

设 (X,d) 和 (Y,ρ) 是两个紧度量空间; $T: X \to X$ 和 $S: Y \to Y$ 是两个同胚; $\phi: X \to Y$ 是系统 (Y,S) 到 (X,T) 的扩张. 如果对每个 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得: 当 $d(x,y) < \delta$ 且 $\phi(x) = \phi(y)$ 时, 成立 $d(T^n(x), T^n(y)) < \epsilon$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$, 则称 ϕ 是**等度连续扩张**; 这时, 也称 (X,T) 是 (Y,S) 的**等度连续扩张**.

例子8.13.

设 α 是无理数. 考虑同胚 $f: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, (x,y) \mapsto (x+\alpha, y+x)$ 和 $g: \mathbb{T} \to \mathbb{T}, x \mapsto x+\alpha$; 则 $\phi: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}, (x,y) \mapsto x$ 是等度连续扩张.

习题64.

证明: Distal 系统的等度连续扩张还是 distal 的.

定义8.50.

设 θ 是一序数. 对每个 $\lambda < \theta$, 设 (X_λ, T_λ) 是紧度量可逆系统; 对 $\lambda < \mu < \theta$, 设 $\phi_\lambda^\mu: X_\mu \to X_\lambda$ 是因子映射且满足 $\phi_\nu^\eta = \phi_\nu^\lambda \phi_\lambda^\eta$ $(\forall \nu < \lambda < \eta < \theta)$. 我们称 (X_λ, T_λ) 和 ϕ_λ^μ $(\lambda < \mu < \theta)$ 一起构成了一个**投射系统**; 简记作 X_λ $(\lambda < \theta)$.

命题8.51.

设 (X_λ, T_λ) 和 ϕ_λ^μ $(\lambda < \mu < \theta)$ 为一个投射系统; 则集合

$$\varprojlim (X_\lambda, T_\lambda)_{\lambda<\theta} := \{(x_\lambda) \in \prod_{\lambda \le \theta} X_\lambda : x_\nu = \phi_\nu^\mu(x_\mu), \forall \nu < \mu < \theta\}$$

是 $\prod_{\lambda\leq\theta} X_\lambda$ 的非空闭子集; $\widetilde{T}_\theta : \varprojlim(X_\lambda, T_\lambda) \to \varprojlim(X_\lambda, T_\lambda), (x_\lambda) \mapsto (T_\lambda(x_\lambda))$ 是同胚.

定义8.52.

我们称命题 8.51 中的可逆系统 $(\varprojlim(X_\lambda, T_\lambda), \widetilde{T}_\theta)$ 是投射系统 $X_\lambda(\lambda < \theta)$ 的**投射极限**.

习题65.

证明: Distal 系统的投射极限还是 distal 的.

以下定理的证明请见 [2].

定理8.53 (Furstenberg 结构定理).

设 $T : X \to X$ 是紧度量空间 X 上的同胚. 如果可逆系统 (X, T) 是 distal 极小的, 则存在可数序数 θ 和投射系统 $X_\lambda(\lambda < \theta)$ 满足:

(1) $X_0 = \{1\}$, (X, T) 拓扑共轭于 $(\varprojlim(X_\lambda, T_\lambda)_{\lambda<\theta}, \widetilde{T}_\theta)$;

(2) $X_{\lambda+1}$ 是 X_λ 的等度连续扩充 ($\forall\ \lambda:\ \lambda + 1 < \theta$);

(3) 若 $\eta < \theta$ 是极限序数, 则 X_η 拓扑共轭于 $(\varprojlim(X_\lambda, T_\lambda)_{\lambda<\eta}, \widetilde{T}_\eta)$.

第 9 章 Baire 定理

本章中, 我们将介绍 Baire 定理及其在混沌理论中的一个应用.

9.1 Baire 定理

本节中, 我们将介绍 Baire 定理和拓扑 Fubini 定理.

定义9.1.

设 A 是拓扑空间 X 的子集. 若 $\overline{A}$ 的内部为空, 则称 A 是 X 的**稀疏集** (或**无处稠集**). 若 A 是可数个稀疏集的并, 则称 A 是**第一纲集**; 否者, 称 A 是**第二纲集**.

定义9.2.

如果拓扑空间 X 的任意可数个稀疏集的并集内部为空, 则称 X 是 Baire **空间**.

命题9.3.

对于拓扑空间 X, 以下条件等价:

(1) X 是Baire空间;

(2) X 中任意可数个稀疏闭集的并集内部为空;

(3) X 中任意可数个稠密开集的交仍是稠密的;

(4) X 中任何非空开集都是第二纲的.

例子9.1.

有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是 Baire 空间; 整数集 $\mathbb{Z}$ 是 Baire 空间.

定理9.4 (Baire 定理).

若 X 是局部紧 Hausdorff 空间或完备度量空间, 则 X 是 Baire 空间.

证明.

我们只对 X 是局部紧 Hausdorff 空间情形证明, 完备度量空间情形类似可证. 假设结论

不成立, 则存在可数个稀疏闭集 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和非空开集 U 使得 $U \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. 因 A_1 是稀疏的并且 X 是局部紧的, 故存在非空开集 V_1 满足 $\overline{V}_1 \subset U \setminus A_1$ 且 $\overline{V}_1$ 是紧的. 类似地, 因 A_2 是稀疏的, 故存在非空开集 V_2 使得 $\overline{V}_2 \subset V_1 \setminus A_2$ 且 $\overline{V}_2$ 是紧的. 依此类推, 我们得到非空开集列 $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots$ 使得: 对每个 i, $\overline{V}_i$ 是紧的且 $\overline{V}_i \cap (\cup_{j=1}^{i} A_j) = \emptyset$. 由紧性, $U \supset \cap_{i=1}^{\infty} \overline{V}_i \neq \emptyset$. 但由 V_i 的定义, $U \cap (\cap_{i=1}^{\infty} \overline{V}_i) = \emptyset$. 矛盾. □

定义9.5.

设 A 是拓扑空间 X 的子集. 若 A 是可数个闭集的并, 则称 A 是 F_σ **集**; *若 A 是可数个开集的交, 则称 X 是 G_δ* **集**.

定理9.6 (**拓扑** Fubini **定理**)**.**

设 X 是完备可分度量空间. 若 R 是 X 上的一个关系且包含 $X \times X$ 的一个稠密 G_δ 集, 则存在 X 的一个稠密 G_δ 子集 A 满足: 对每个 $x \in A$, 都有 X 的稠密 G_δ 集 A_x 成立 $\{(x, y) : x \in A,\ y \in A_x\} \subset R$.

证明.

设 $R \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, 其中每个 U_n 都是 $X \times X$ 的稠开集. 对$x \in X$, 令 $L_n(x) = \{y \in X : (x, y) \in U_n\}$; 易见 $L_n(x)$ 是开集. 令 $X_n = \{x \in X : L_n(x)\text{是稠密的}\}$.

我们断言: X_n 是 X 的稠 G_δ 集. 事实上, 取 X 的一个可数稠子集 $\{z_i : i \in \mathbb{Z}_+\}$ 并令 $F_n = X \times X \setminus U_n$. 对正整数 i 和正有理数 r, 令

$$F_n(i, r) = \{x \in X : (x, y) \in F_n,\ \forall y \in \overline{B}(z_i, r)\}.$$

易见, $F_n(i, r)$ 是稀疏闭集并且 $X \setminus X_n = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+, r \in \mathbb{Q}_+} F_n(i, r)$. 这样, 断言得证.

令 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. 由 Baire 定理, 我们知 A 是稠 G_δ 的且满足要求. □

9.2 拓扑传递性*

本节中, 我们将给出拓扑传递性的定义, 并讨论它与点传递性的关系. 然后, 我们给出初值敏感性和几乎等度连续性的定义, 并对传递系统建立二分性定理. 最后, 我们给

出一致刚性的定义并证明几乎等度连续系统的一致刚性.

定义9.7.

设 (X,f) 是拓扑动力系统. 若对 X 中任意两个非空开集 U 和 V, 都存在正整数 n 使得 $f^n(U)\cap V\neq\emptyset$, 则称 (X,f) 或 f 是**拓扑传递**的.

习题66.

设 x 是动力系统 (X,f) 的传递点. 若 X 是不含孤立点的 Hausdorff 空间, 则对每个非空开集 U, 集合 $\{n\in\mathbb{N}: f^n(x)\in U\}$ 都是无限的.

命题9.8.

设 X 是无孤立点的 Hausdorff 空间, $f: X\to X$ 是连续映射. 若 (X,f) 是点传递的, 则它是拓扑传递的.

证明.

固定一个传递点 x. 任给 X 的非空开集 U 和 V. 因 X 不含孤立点, 由习题66, 存在 $0<n_1<n_2$ 使得: $f^{n_1}(x)\in U$ 且 $f^{n_2}(x)\in V$. 这样 $f^{n_2-n_1}(f^{n_1}(x))\in V$; 这蕴含 $f^{n_2-n_1}(U)\cap V\neq\emptyset$. □

命题9.9.

以下三条等价:

(1) (X,f) 是拓扑传递的;

(2) 对每个非空开集 U 成立 $\cup_{i=0}^{\infty}f^{-1}(U)$ 在 X 中稠密;

(3) 若 V 是非空开集且 $f^{-1}(V)\subset V$, 则 V 在 X 中稠密.

证明.

(1) $\Longrightarrow$ (2) 假设对某个非空开集 U, $\cup_{i=0}^{\infty}f^{-1}(U)$ 在 X 中不稠; 则 $V:=X\setminus\overline{\cup_{i=0}^{\infty}f^{-i}(U)}$ 是非空开集且满足 $f^n(V)\cap U=\emptyset$ $(\forall n\in\mathbb{N})$. 这与 (X,f) 的拓扑传递性相矛盾.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 由 $f^{-1}(V)\subset V$, 知 $\cup_{i=0}^{\infty}f^{-i}(V)\subset V$. 故 V 在 X 中稠密.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 任给非空开集 U 和 V. 令 $W=\cup_{i=0}^{\infty}f^{-i}(V)$; 则 W 是非空开集且 $f^{-1}(W)\subset W$.

故 W 稠密; 特别地, $U \cap W \neq \emptyset$. 于是, 存在某个 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. 所以, (X, f) 是拓扑传递的. □

命题9.10.

设 $f : X \to X$ 是完备可分度量空间 X 上的连续映射. 若 (X, f) 是拓扑传递的, 则它是点传递的, 并且传递点集构成稠密 G_δ 集.

证明.

设 $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是 X 的一组拓扑基; 则 (X, f) 的传递点的集合

$$\mathrm{Tran}(X, f) = \cap_{i=0}^{\infty}(\cup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(U_i)).$$

由命题 9.9(2) 和 Baire 纲定理, $\mathrm{Tran}(X, f)$ 是稠 G_δ 集. □

命题9.11.

设 $f : X \to X$ 是完备度量空间 (X, d) 上的连续映射; (X, f) 是拓扑传递的; v 是 (X, f) 的一个 n 阶周期点 $(n \geq 1)$. 若 X 不含孤立点, 则存在 f^n 不变的非空闭集 Y 使得: (1) $\mathrm{Int}(Y)$ 在 Y 中稠; (2) $(Y, f^n|_Y)$ 拓扑传递; (3) $(Y, f^n|_Y)$ 有不动点.

证明.

取定一个传递点 u. 对 $0 \leq i < n$, 令 $X_i = \overline{\mathcal{O}(f^i(u), f^n)}$; 则 $X = X_0 \cup \cdots \cup X_{n-1}$, 且每个 X_i 都是 f^n-不变的. 因 $f(X_i) \subset X_{i+1 \bmod n}$ 且 $f^j(v)$ 是 f^n 的不动点 $(\forall j > 0)$, 故每个 X_i 都含 f^n 的不动点. 由 Baire 定理, 存在 $i_0 \in \{0, \cdots, n-1\}$ 使得 $U := \mathrm{Int}(X_{i_0}) \neq \emptyset$. 令 $Y = X_{i_0}$.

我们断言: $f^{-n}(U) \subset Y$. 事实上, 设 $x \in f^{-n}(U)$. 因 $f^{-n}(U)$ 是开集且 X 不含孤立点, 则存在某个 $j \in \{0, \cdots, n-1\}$, 及 $0 < k_1 < k_2 < \cdots$, 使得 $f^{k_i n + j}(u) \to x$; 特别地, $x \in X_j$. 这样, 当 i 充分大后, 有 $f^n(f^{k_i n+j}(u)) \in Y$. 由 Y 的 f^n 不变性, 有

$$x = \lim_{i \to \infty} f^{k_{i+1}n+j}(u) = \lim_{i \to \infty} f^{(k_{i+1}-k_i)n}(f^{k_i n+j}(u)) \in Y.$$

断言得证.

因 U 是 Y 的内部, 所以 $f^{-n}(U) \subset U$; 即 $f^n(Y \setminus U) \subset Y \setminus U$. 如果 U 在 Y 中不稠, 则当 i 充分大后, $f^{in+i_0}(u) \in Y \setminus U$. 这与 X 没有孤立点矛盾. 所以, $\overline{U} = Y$; 特别地, Y 不含孤立点. 于是, 由命题 9.8, $(Y, f^n|_Y)$ 是拓扑传递的. □

下面 "敏感性" 的定义是对 "蝴蝶效应" 从数学上的精确描述.

定义9.12.

设 $f : X \to X$ 是紧度量空间 (X, d) 上的连续映射. 如果存在 $\epsilon > 0$ 使得对每个 $x \in X$ 和每个 $\delta > 0$, 都有 $y \in B(x, \delta)$ 和 $n \in \mathbb{Z}_+$ 成立 $d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon$, 则称系统 (X, f) 是**初值敏感的** (简称**敏感的**); ϵ 称为 (X, f) 的**敏感常数**.

定义9.13.

设 $f : X \to X$ 是紧度量空间 (X, d) 上的连续映射, $x \in X$. 如果对每个 $\epsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$, 成立 $\mathrm{diam}(f^n(B(x, \delta))) \le \epsilon\,(\forall n \in \mathbb{N})$, 则称 x 是系统 (X, f) 的**等度连续点**. 若 (X, f) 含有一个等度连续的传递点 (从而所有传递点都是等度连续的), 则称该系统是**几乎等度连续**的.

命题9.14 (传递系统的二分性).

设 (X, f) 是拓扑传递的紧度量系统; 则 (X, f) 或是敏感的, 或是几乎等度连续的.

证明.

固定一个传递点 $x \in X$. 假设 (X, f) 不是敏感的; 则对每个 $\epsilon > 0$, 都存在非空开集 U 使得 $\mathrm{diam}(f^n(U)) \le \epsilon$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. 取 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $f^k(x) \in U$. 由连续性, 存在 $\delta > 0$, 使得 $f^i(B(x, \delta)) \le \epsilon$ $(\forall i = 0, \cdots, k)$ 并且 $f^k(B(x, \delta)) \subset U$. 于是, $\mathrm{diam}(f^n(B(x, \delta))) \le \epsilon$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. 这样, x 是等度连续点; 即 (X, f) 是几乎等度连续的. □

定义9.15.

对于紧度量系统 (X, f), 若存在正整数列 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 使得 f^{n_i} 一致收敛到恒等映射, 则称 (X, f) 是**一致刚性**的.

命题9.16.

若 (X, f) 是几乎等度连续的紧度量系统, 则它是一致刚性的.

证明.

任给 $\epsilon > 0$. 设 x 是等度连续的传递点; 则存在 x 的开邻域 U, 使得对每个 $y \in U$, 有 $d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon$ $(\forall i \in \mathbb{N})$. 取 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $f^k(x) \in U$; 则 $d(f^i(x), f^k f^i(x)) = d(f^i(x), f^i f^k(x)) < \epsilon$ $(\forall i \in \mathbb{N})$. 而 $\{f^i(x) : i \in \mathbb{N}\}$ 在 X 中稠, 故 $d(y, f^k(y)) \leq \epsilon$ $(\forall y \in X)$. (X, f) 的一致刚性得证. □

9.3 Li-Yorke混沌*

本节中, 我们将给出 Li-Yorke 关系的刻画和 Li-Yorke 混沌的定义.

除非特别说明, 以下我们总是假定 $f : X \to X$ 是紧度量空间 (X, d) 上的连续映射.

定义9.17.

对 $(x, y) \in X \times X$,

若 $\liminf d(f^n(x), f^n(y)) = 0$, 则称 (x, y) 是 proximal 对;

若 $\lim d(f^n(x), f^n(y)) = 0$, 则称 (x, y) 是 asymptotic 对;

若 (x, y) 是 proximal 但非 asymptotic 的, 则称其为 Li-Yorke 对.

我们用 $PR, AR,$ 和 LYR 分别表示 proximal, asymptotic, 和 Li-Yorke 关系. 设 $\Delta_n = \{(x, y) : d(x, y) < \frac{1}{n}\}$, $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$.

引理9.18.

设 $A_{k,n} = \bigcap_{i=k}^{\infty} (f \times f)^{-i} \overline{\Delta}_n$. 则

(1) $AR = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,n})$;

(2) $PR = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\bigcup_{n=1}^{\infty} (f \times f)^{-n} \Delta_k)$;

(3) $LKR = PR \setminus AR$.

命题9.19.

设 (X,f) 是拓扑传递的且 X 不含孤立点. 则 AR 是 $X\times X$ 的第一纲集; 对每个 $x\in X$, $AR(x)$ 是 X 的第一纲集.

证明.

由命题 9.14, 我们分两种情形讨论.

情形1. (X,f) 是几乎等度连续的. 由命题 9.16, (X,f) 是一致刚性的; 特别地, $AR=\Delta$ 且 $AR(x)=x$ $(\forall x\in X)$.

情形2. (X,f) 是初值敏感的. 设 $c>0$ 为敏感常数; 正整数 n 满足 $\frac{2}{n}<c$. 则对所有的 $k\in\mathbb{Z}_+$ 及 $x\in X$, $A_{k,n}(x)$ 内部为空. 否则, 存在 $k_0\in\mathbb{N}$ 及 $x_0\in X$ 使得 $U:=\mathrm{Int}(A_{k_0,n}(x_0))\neq\emptyset$. 这样, 对任意 $y,z\in U$, 有 $d(f^i(y),f^i(z))\le\frac{2}{n}$ $(\forall i\ge k)$. 由连续性, 存在非空开集 $V\subset U$ 使得 $\mathrm{diam}(f^i(V))\le c$ $(\forall i\ge 0)$. 这与敏感性矛盾.

由引理 9.18, $AR(x)$ 和 AR 都是是第一纲的 (注意 $A_{k,n}$ 的内部为空). □

定义9.20.

设 $S\subset X$. 如果对任意 $x\neq y\in S$, (x,y) 都构成 Li-Yorke 对 (即$S\times S\setminus\Delta\subset LYR$), 则称 S 是 scramble **集**.

下面是混沌系统的第一个数学定义.

定义9.21 (Li-Yorke 混沌).

如果 (X,f) 具有一个不可数的scramble集, 则称它是 Li-Yorke **混沌**的.

例子9.2.

例子 2.30 和 2.29 及习题 29 中的系统都是 Li-Yorke 混沌的.

9.4 Devaney混沌*

本节给出 Devaney 混沌的定义.

定义9.22 (Devaney 混沌).

如果系统 (X, f) 满足以下三条:

(1) 拓扑传递;

(2) 周期点集稠密;

(3) 初值敏感;

则称 (X, f) 是 Devaney **混沌**的.

命题9.23.

若 X 不含孤立点, 则 Devaney 混沌定义中的条件 (1) + (2) 蕴含 (3).

证明.

因 X 不含孤立点, 由条件(2), 我们可取两个周期点 v_1, v_2 使得 $\mathcal{O}(v_1, f) \neq \mathcal{O}(v_2, f)$. 令 $K_1 = \mathcal{O}(v_1, f), K_2 = \mathcal{O}(v_2, f)$; 令 $\delta = d(K_1, K_2) > 0$ (见定义4.32). 任给 $x \in X$ 及 x 开邻域 U. 不妨假设 $d(x, K_1) > \delta/2$. 由条件(2), 存在周期点 $p \in U$ 使得 $d(x, p) < \delta/8$; 假设 p 的阶是 n. 由连续性, 存在 $\delta' > 0$, 对任意 $y \in X$, 只要 $d(y, K_1) < \delta'$, 就有 $\max\{d(f^i(y), K_1) : i = 0, \cdots, n-1\} < \delta/8$. 固定传递点 $u \in U$; 则存在正整数 l 使得 $d(f^l(u), K_1) < \delta'$. 设 $0 \leq k < n-1$ 满足 $n \mid l + k$; 则

$$d(f^{l+k}(u), f^{l+k}(p)) = d(f^k(f^l(u)), p) \geq d(f^k(f^l(u)), x) - d(x, p)$$

$$\geq d(x, K_1) - d(K_1, f^k(f^l(u))) - d(x, p) > \delta/2 - \delta/8 - \delta/8 = \delta/4.$$

这样, 或者 $d(f^{l+k}(x), f^{l+k}(u)) > \delta/8$, 或者 $d(f^{l+k}(x), f^{l+k}(p)) > \delta/8$. 敏感性得证. □

例子9.3.

例子2.30和2.29及习题29中的系统都是Devaney 混沌的.

9.5 黄-叶定理*

本节介绍黄-叶定理: Devaney 混沌蕴含 Li-Yorke 混沌.

引理9.24.

设 X 是无孤立点的完备可分度量空间, R 是 X 上的一个对称关系. 若 A 是 X 的一个稠密 G_δ 集并且对每个 $x \in A$, $R(x)$ 都包含一个稠密 G_δ 子集, 则存在 X 的一个不可数稠密子集 B 成立 $B \times B \setminus \Delta \subset R$.

证明.

设 $\mathcal{B} = \{B \subset X : B \times B \setminus \Delta \subset R\}$. 设 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X 的拓扑基. 我们将对每个 i, 取 $x_i \in U_i$, 使得 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{B}$. 对 $i = 1$, 因为 A 是稠 G_δ 的, 故 $A \cap U_1 \neq \emptyset$; 任取 $x_1 \in A$. 假设对正整数 n, 已经取好 $\{x_1, \cdots, x_n\} \in \mathcal{B}$, 其中每个 $x_i \in U_i$. 令 $D_n = A \cap (\bigcap_{i=1}^{n} R(x_i))$. 则 D_n 包含稠 G_δ 集; 特别地, $D_n \cap U_{n+1} \neq \emptyset$. 任取 $x_{n+1} \in D_n \cap U_{n+1}$; 则 $\{x_1, \cdots, x_{n+1}\} \in \mathcal{B}$. 这样, 我们便得到了 $C := \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{B}$.

利用 Zorn 引理, 存在集合包含关系下 $\mathcal{B}$ 中的极大元 $B \supset C$. 我们断定: B 是不可数的. 否则, 设 $B = \{z_i\}_{i=1}^{\infty}$. 则 $A \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} R(z_i)$ 包含稠 G_δ 集; 特别地, 可取 $x \in A \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} R(z_i)$ 使得 $x \neq z_i$ $(\forall i \geq 1)$. 这样, $B \cup \{x\} \in \mathcal{B}$. 这导致矛盾. 因此, B 不可数. □

定理9.25 (黄-叶定理).

设 (X, f) 是紧度量系统且 X 不含孤立点. 若 (X, f) 是拓扑传递的且含一个周期点, 则它是 Li-Yorke 混沌的; 特别地, 若 (X, f) 是Devaney 混沌的, 则它必是 Li-Yorke 混沌的.

证明.

由命题 9.11, 我们不妨假设 (X, f) 含有不动点 v. 设 x 是一传递点. 因 X 不含孤立点, 所以存在 $0 < n_1 < n_2 < \cdots$ 使得 $f^{n_i}(x) \to v$. 因 v 是不动点, 所以对任何正整数 j 有 $f^{n_i}(f^j(x)) \to v$. 这样对任意 $j \neq j'$, $f^j(x)$ 和 $f^{j'}(x)$ 构成 proximal 对. 于是, 由引理 9.18(2), PR 为 $X \times X$ 的稠 G_δ 集. 再根据命题 9.19 和引理 9.18(3), 知 LYR 包含稠 G_δ 集. 由定理 9.6 和引理 9.24 知 (X, f) 是 Li-Yorke 混沌的. □

9.6 麦的构造性证明*

本节中, 我们将介绍麦结华对黄-叶定理的构造性证明.

以下我们总是假定 $f: X \to X$ 是紧度量空间 (X, d) 上的连续映射并且 X 是不含孤立点.

引理9.26.

设 (X, f) 是点传递的且有一个不动点 v. 设 U_1, U_2 是 X 中不交的非空开集. 则对每个 $\epsilon > 0$, 存在正整数 k 和非空开集 $V_i \subset U_i$ $(i = 1, 2)$ 使得 $f^k(V_1 \cup V_2) \subset B(v, \epsilon)$.

证明.

固定传递点 $x \in X$; 则存在 $n_1, n_2 \geq 0$ 使得 $f^{n_1}(x) \in U_1, f^{n_2}(x) \in U_2$. 不妨设 $n_1 \leq n_2$; 令 $m = n_2 - n_1$. 取 $\delta > 0$ 使得 $f^i(B(v, \delta)) \subset B(v, \epsilon), i = 0, \cdots, m$. 取 $k > 0$ 使得 $f^{k+n_1}(x) \in B(v, \delta)$; 则 $f^{k+n_2}(x) = f^{m+l+n_1}(x) \in B(v, \epsilon)$. 由连续性, 分别存在 $f^{n_1}(x), f^{n_2}(x)$ 的开邻域 $V_1 \subset U_1, V_2 \subset U_2$ 使得 $f^k(V_1 \cup V_2) \subset B(v, \epsilon)$. □

引理9.27.

设 (X, f) 是初值敏感的且 $c > 0$ 是一个敏感常数; U_1, U_2 是 X 中不交的非空开集. 则存在非空开集 $V_i \subset U_i$ $(i = 1, 2)$ 和正整数 n 使得 $\inf\{d(f^n(x), f^n(y)) : x \in V_1, y \in V_2\} \geq c/2$.

证明.

取定 $u \in U_1$, $v \in U_2$. 由敏感性, 存在 $w \in U_1$ 及 $n > 0$, 使得 $d(f^n(u), f^n(w)) > c$. 这样, 或者 $d(f^n(u), f^n(v)) > c/2$, 或者 $d(f^n(w), f^n(v)) > c/2$. 引理结论由连续性可得. □

定义9.28.

设 U, V 是 X 的非空不交开集; c, ϵ 是正常数. 如果存在正整数 p, q 使得

$$\operatorname{diam}(f^p(U \cup V)) \leq 2\epsilon, \quad \inf\{d(f^q(x), f^q(y)) : x \in U, y \in V\} \geq c/2,$$

则称 (U, V) 是 (c, ϵ)-scramble **开集对**.

下面引理直接由归纳法可证.

引理9.29.

设 U 是 X 的非空开集; c, ϵ 是正常数. 如果 U 中任意不交的非空开集 V, W, 都存在非空开集 $\widetilde{V} \subset V, \widetilde{W} \subset W$ 成为 (c, ϵ)-scramble 开集对, 则对 U 中任意 $n \geq 2$ 个两两不交的非空开集 $\{U_i : i = 1, \cdots, n\}$, 都存在非空开集 $V_i \subset U_i$ 使得 (V_i, V_j) $(i \neq j)$ 构成 (c, ϵ)-scramble 开集对.

定理9.30.

设 (X, f) 是 Devaney 混沌的. 则存在 Cantor 集 $C \subset X$ 使得 C 为 (X, f) 的 scramble 集; 特别地, (X, f) 是 Li-Yorke 混沌的.

证明.

设 $c > 0$ 是敏感常数. 取定一个传递点 u 和周期点 v; 假设 v 的周期为 p. 由命题 9.11, 存在 f^p 不变的闭集 Y 使得 $U := \text{Int}(Y)$ 在 Y 中稠密且 $(Y, f^p|_Y)$ 是拓扑传递的且含不动点. 设 U_1, U_2 是 U 的两个不交的非空开集. 任给 $\epsilon > 0$; 对 $(Y, f^p|_Y)$ 应用引理 9.26 知存在非空开集 $V_1 \subset U_1, V_2 \subset U_2$ 和正整数 m 使得 $\text{diam}(f^m(V_1 \cup V_2)) \leq 2\epsilon$. 再应用引理 9.27, 存在 $W_1 \subset V_1, W_2 \subset V_2$ 和 $n > 0$, 成立 $\inf\{d(f^n(x), f^n(y)) : x \in W_1, y \in W_2\} \geq c/2$. 这样, 对于开集 U, 引理 9.29 的条件已经满足.

下面, 我们对每个正整数 n 和 $w \in \{0,1\}^n$, 归纳地定义 X 的非空开子集 A_w, 使得 $\text{diam}(A_w) < 1/n$ 且对任意 $w' \neq w''$, $(A_{w'}, A_{w''})$ 成为 $(c, 1/n)$-scramble 开集对. 对 $n = 1$, 因 X 不含孤立点, 所以存在不交的非空开集 $U_0, U_1 \subset U$ 使得 $\text{diam}(U_i) \leq 1$ $(i = 0, 1)$. 由第一段的讨论, 存在非空开集 $A_0 \subset U_0, A_1 \subset U_1$ 使得 (A_0, A_1) 构成 $(c, 1)$-scramble 开集对. 假设对 $n < m$ 及任意 $w \in \{0,1\}^n$, A_w 已定义. 因 X 不含孤立点, 对每个 $w \in \{0,1\}^{m-1}$, 存在不交的非空开集 $U_{w0}, U_{w1} \subset A_w$ 使得$\text{diam}(U_{wi}) < 1/m$ $(i = 0, 1)$. 由引理 9.29, 存在非空开集 $A_{w0} \subset U_{w0}, A_{w1} \subset U_{w1}$ 使得对任意 $w' \neq w'' \in \{0,1\}^m$, $(A_{w'}, A_{w''})$ 成为 $(c, 1/m)$-scramble 开集对.

对每个正整数 n, 令 $X_n = \cup_{w \in \{0,1\}^n} \overline{A_w}$. 令 $C = \cap_{n=1}^{\infty} X_n$. 由推论 5.25, 知 C 是 Cantor

集. 由 A_w 的定义, 可见 C 是 scramble 集. 这样我们完成了证明. $\square$

参考文献

[1] *Aoki, N. Topological dynamics. Topics in general topology, 625 – 740, North-Holland Math. Library, 41, North-Holland, Amsterdam, 1989.*

[2] *Auslander, J. Minimal flows and their extensions. North-Holland Mathematics Studies, 153. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 122. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.*

[3] *Banks, J.; Brooks, J.; Cairns, G.; Davis, G.; Stacey, P. On Devaney's definition of chaos. Amer. Math. Monthly 99 (1992), no. 4, 332-334.*

[4] *Bing, R. H. The elusive fixed point property. Amer. Math. Monthly 76 (1969), 119 – 132.*

[5] *Devaney, Robert L. An introduction to chaotic dynamical systems. Second edition. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.*

[6] *Furstenberg, H. Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory. Princeton University Press, 1981.*

[7] *Hindman, N.; Strauss, D. Algebra in the Stone-Čech compactification. Theory and applications. Second revised and extended edition. De Gruyter Textbook. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2012.*

[8] *Huang, W.; Ye, X. Devaney's chaos or 2-scattering implies Li-Yorke's chaos. Topology Appl. 117 (2002), no. 3, 259 – 272.*

[9] *Kuratowski, K. Topology, Vol. II. PWN, Warszawa, 1968.*

[10] Li, T. Y.; Yorke, James A. Period three implies chaos. Amer. Math. Monthly 82 (1975), no. 10, 985–992.

[11] 麦结华. 路连通空间与弧连通空间. 广西大学学报（自然科学版）*(2020) 45*卷*3*期*, 674-680.*

[12] Mai, J. Devaney's chaos implies existence of s-scrambled sets. Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), no. 9, 2761-2767.

[13] Moreira, J. Monochromatic sums and products in $\mathbb{N}$*. Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 3, 1069-1090.*

[14] Munkres, James R. 拓扑学*(*第二版*),* 熊金城*,* 吕杰*,* 谭枫 译*,* 机械工业出版社*, 2006.*

[15] Nadler, Sam B. Continuum Theory: An introduction, Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker Inc., New York, 1992.

[16] Šarkovskiĭ, O. M. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. (Russian) Ukrain. Mat. Ž. 16 (1964), 61-71.

[17] 熊金城. 点集拓扑讲义*(*第五版*),* 高等教育出版社*, 2020.*

[18] 叶向东*;* 黄文*;* 邵松. 拓扑动力系统概论*,* 现代数学基础丛书*118,* 科学出版社*, 2008.*

索引