

中图分类号: TP317.2

科学工作平台

Scientific WorkPlace 学习指南

潘 洪 亮

email:mathlab@suda.edu.cn

2019 年 8 月 5 日

苏州大学
数学科学学院

前 言

*Scientific WorkPlace*是由MacKichan Software,Inc.开发的一个科学工作平台,集 $\text{\LaTeX}$ 排版及计算机代数系统(MuPAD或Maple)于一体.与其同一系列的还有*Scientific Word*、*Scientific Notebook*.

本学习指南分成以下几个部分:

第一章 在学习指南前,理解视窗中键盘与鼠标的操作约定,如何重排或切换窗口,在文档中跳转,改变工作视图的缩放率等.

第二章 介绍简单文档的创建,包括创建列表、输入行中数学及独立数学表达式,不排版与排版文档是不同的.

第三章 罗列各种数学符号及表达式的输入,使用标准工具栏、数学对象与模板、符号面板及符号自定义工具栏等.

第四章 说明排版与不排版文档不同的打印外观.如何创建包含表格及标题的文档,改变文本的外观、预览及打印.

第五章 由浅入深地介绍创建结构化排版的高级文档.如何排版数学对象,生成文档标题、目录表、摘要、节标题及脚注,具有交叉参考、参考文献、编号的方程及定理等.

第六章 介绍如何输出文档为HTML格式及PDF文件,打包或解包文档到其他计算机中,以便交流及预览打印.

第七章 简要地介绍在*Scientific WorkPlace*中如何学习线性代数,应用计算机代数系统进行相关的计算或运算.

由于作者水平所限,指南中一定还有疏漏不足之处,希望读者不吝批评指正.

苏州大学数学科学学院

潘洪亮

目 录

前 言	iii
第一章 开始前	1
1.1 使用超文本链接	1
1.2 理解约定	1
1.2.1 一般符号	2
1.2.2 键盘	2
1.2.3 鼠标	2
1.3 开启第二个窗口	2
第二章 创建简单的文档	4
2.1 创建新文档	4
2.2 输入首段	4
2.2.1 输入段落内容	4
2.2.2 输入列表	5
2.3 输入第二段	5
2.3.1 输入行中数学	6
2.3.2 输入独立数学	7
2.4 输入第三段	7
2.5 预览及打印文档	8
第三章 输入数学表达式	9
3.1 重要的事情先来	9
3.2 符号与字符	10
3.2.1 使用键盘	11
3.2.2 使用鼠标	11

3.3	重音字符	11
3.3.1	使用键盘	11
3.3.2	使用鼠标	12
3.4	粗体数学字符	13
3.4.1	利用键盘	13
3.4.2	使用鼠标	14
3.5	凸起的小圆点符	14
3.5.1	利用键盘	14
3.5.2	利用鼠标	15
3.6	在线小圆点	15
3.6.1	利用键盘	16
3.6.2	利用鼠标	16
3.7	上撇号	17
3.7.1	利用键盘	17
3.7.2	利用鼠标	18
3.8	下标与上标	18
3.8.1	利用键盘	19
3.8.2	利用鼠标	19
3.9	具有下标与上标的下标或上标	19
3.9.1	利用键盘	20
3.9.2	利用鼠标	20
3.10	同侧的上标及下标	21
3.10.1	利用键盘	21
3.10.2	利用鼠标	21
3.11	前侧下标及细小间距	22
3.11.1	利用键盘	22
3.11.2	利用鼠标	22
3.12	限制的行中运算符及独立运算符	23
3.12.1	利用键盘	23
3.12.2	利用鼠标	24

3.13 多行限制的运算符	24
3.13.1 利用键盘	24
3.13.2 利用鼠标	25
3.14 行中积分符与独立的积分符及修正后的积分符	26
3.14.1 利用键盘	26
3.14.2 利用鼠标	27
3.15 二重积分与三重积分	28
3.15.1 利用键盘	28
3.15.2 利用鼠标	29
3.16 简单分数	29
3.16.1 利用键盘	30
3.16.2 利用鼠标	30
3.17 繁分数	30
3.17.1 利用键盘	31
3.17.2 利用鼠标	31
3.18 连分数	32
3.18.1 利用键盘	32
3.18.2 利用鼠标	34
3.19 组合数	36
3.19.1 利用键盘	36
3.19.2 利用鼠标	37
3.20 括号	37
3.20.1 利用键盘	37
3.20.2 利用鼠标	38
3.21 不匹配的括号	38
3.21.1 利用键盘	38
3.21.2 利用鼠标	39
3.22 左空括号	40
3.22.1 利用键盘	40
3.22.2 利用鼠标	41

3.23 右空括号	41
3.23.1 利用键盘	42
3.23.2 利用鼠标	42
3.24 具有根指数的根号	43
3.24.1 利用键盘	43
3.24.2 利用鼠标	43
3.25 标签	44
3.25.1 利用键盘	44
3.25.2 利用鼠标	44
3.26 装饰符	45
3.26.1 利用键盘	45
3.26.2 利用鼠标	45
3.27 具有上标的装饰符	45
3.27.1 利用键盘	45
3.27.2 利用鼠标	47
3.28 下括号、标签及突起小圆点	48
3.28.1 利用键盘	48
3.28.2 利用鼠标	49
3.29 简单形式的矩阵	49
3.29.1 利用键盘	49
3.29.2 利用鼠标	50
3.30 向量	51
3.30.1 利用键盘	51
3.30.2 利用鼠标	52
3.31 分段函数	53
3.31.1 利用键盘	53
3.31.2 利用鼠标	55
3.32 另一形式的矩阵	56
3.32.1 利用键盘	57
3.32.2 利用鼠标	58

3.33 函数	59
3.33.1 利用键盘	60
3.33.2 利用鼠标	60
第四章 打印与排版	62
4.1 新建文档	62
4.2 输入文档标题	63
4.3 输入首个段落	63
4.4 开始第二节	64
4.5 输入包含表格的段落	65
4.6 输入最后一节	67
4.7 保存文档	68
4.8 打印不排版的文档	68
4.9 打印排版的文档	69
4.10 比较排版与不排版的文档	70
第五章 创建高级文档	71
5.1 创建新文档	71
5.2 创建文档头	72
5.2.1 打开文档头并输入你的姓名	72
5.2.2 输入第二个作者姓名	72
5.2.3 输入标题与日期	73
5.2.4 输入摘要	73
5.2.5 生成目录表	74
5.3 创建第1节	74
5.3.1 输入节标题	74
5.3.2 输入段落内容	74
5.4 创建第2节	75
5.4.1 输入节标题	75
5.4.2 输入首个段落	75
5.4.3 输入最后段落	76

5.5	创建第3节	76
5.5.1	输入节标题	77
5.5.2	输入首个段落	77
5.5.3	输入最后段落	78
5.5.4	输入命题内容	79
5.5.5	输入推论内容	79
5.5.6	输入实例	79
5.6	创建第4节	80
5.6.1	输入节标题	80
5.6.2	输入首句并创建交叉参考	80
5.6.3	完成本节	81
5.7	创建参考文献	81
5.7.1	创建第一个参考文献项	81
5.7.2	创建第二个参考文献项	82
5.7.3	创建第三个参考文献项	82
5.8	排版文档	83
5.8.1	预览排版的文档	83
5.8.2	保存并打印文档	83
第六章	共享你的成果	85
6.1	输出文档为HTML格式	85
6.2	创建排版的PDF文件	86
6.2.1	选择PDF输出	86
6.2.2	排版为PDF文件	86
6.3	打包及解包文档	87
6.3.1	用文档管理器打包文档	87
6.3.2	用文档管理器解包文档	87
6.3.3	用ASSII编辑器打开解包文档	88
第七章	在SWP中学习线性代数	89
7.1	线性方程组	90
7.1.1	解线性方程组（方程个数等于未知量个数）	90

7.1.2	解线性方程组 (方程个数大于未知量个数)	91
7.1.3	解线性方程组 (方程个数小于未知量个数)	91
7.1.4	初等变换与Gauss消元法	92
7.2	矩阵	93
7.2.1	矩阵的定义	93
7.2.2	矩阵的运算	95
7.2.3	单位矩阵与逆矩阵	98
7.2.4	线性方程组的矩阵解法	99
7.2.5	矩阵的初等行变换	101
7.3	矩阵的进一步研究	105
7.3.1	分块矩阵	105
7.3.2	矩阵的初等变换	108
7.3.3	矩阵的秩	109
7.3.4	逆矩阵的求法	110
7.3.5	矩阵方程	112
7.4	向量组与解空间	113
7.4.1	向量的概念	113
7.4.2	向量的和与数乘向量	114
7.4.3	向量组的线性表示及线性相关与无关	115
7.4.4	基、维数与坐标	119
7.4.5	线性方程组的解的结构	121
7.5	矩阵的对角化	123
7.5.1	行列式	123
7.5.2	特征多项式	128
7.5.3	特征值及特征向量	129
7.5.4	向量的内积与正交矩阵	130
7.5.5	实对称矩阵的对角化	131
7.6	实二次型	137
7.6.1	正交变换的方法化简二次型	138
7.6.2	配方法化简二次型	138
7.6.3	正定二次型	139

第一章 开始前

Scientific WorkPlace (简称SWP) 集成 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 排版及计算机代数系统 (MuPAD 3.1或Maple 5.1). 在深入了解本学习指南前, 请熟悉本章的若干说明.

§ 1.1 使用超文本链接

在SWP中通过练习, [单击此处](#)表明[超级链接](#)到文档的另一处. 当你鼠标指向[单击此处](#)时, 鼠标指针的形状变为 

> 跳转到超级链接的目标处

- 按ctrl键同时用鼠标单击[链接处](#).
- 或
- 定位于[链接处](#), 从工具菜单中选择**激活**.

> 退回到包含链接的段落处

1. 从视图菜单中选择工具栏, 检验History或Link, 选择关闭.
2. 在历史工具栏或链接工具栏中, 选择 .

或

- 从定位菜单中选择**记载向后**.

现在开始试试. [单击此处](#)观察插入点移到了何处, 再单击 , 插入点又回到原处的段落开始处.

§ 1.2 理解约定

跟随指南有助于理解练习中的有关概念. 假定你已熟悉基本的视窗操作及术语, 必要时你可复习一下相关视窗的文档.

1.2.1 一般符号

- 符号> 表示开始系列说明.
- [单击此处](#)表示超级链接处.
- 选择是指菜单中的命令列表或显示按钮. 你可以用键盘或鼠标选择.
- 点选是指为后续活动高亮文档的某部分或在对话框中高亮专门参数.
- 检验是指在对话框中开启检验框.

1.2.2 键盘

- 指南中涉及的键盘名称意义明了, 诸如Ctrl, Esc, Shift.
- 两个关键词名称间的加号(+)表示按住第一个键再按住第二键. 例如, Ctrl+g是指按住第一个键Ctrl再按称第二键g, 然后再释放两者.
- 记号Ctrl+word指按住第一个键Ctrl再输入word, 然后再释放Ctrl, 结果显示word所指的特殊含义. 例如, Ctrl+gamma指按住第一个键Ctrl再输入单词gamma, 然后再释放Ctrl, 输入的单词gamma变成了 γ .

1.2.3 鼠标

假如你没有改变鼠标的缺省设置.

- 单击是指按鼠标左键, 然后立即释放左键且不移动鼠标.
- 双击是指快速连续两次按鼠标左键, 然后立即释放左键且不移动鼠标.
- 拖拉是指按住鼠标左键, 同时移动鼠标再释放左键.

§ 1.3 开启第二个窗口

建议你打印本学习指南, 然后重新打开新文档进行练习.

要使工作尽善尽美, 开启新文档实时练习最好. 你可从窗口菜单、标题等了解更多信息.

在你练习的同时, 你可能需要不时打开对话框. 如果指南隐藏在对话框后, 你应该处理完对话框以便继续练习. 你可能会发现减小工作视图缩放率以获得更多信息也是有帮助的.

> 开启第二个窗口新建文件

1. 在标准工具栏上单击  或从文件菜单中选择**新建**.
2. 如果你从[创建高级文档](#)开始练习，请跟随练习中的指南选择模板文件，选择**确定**.

对于其他练习,

- 在SWP或SW中, 从文档模板目录中选择Standard LaTeX, 再选择模板文件为Blank - Standard LaTeX Article.

或

- 在SNB中, 从文档模板目录中选择General, 再选择模板文件为Blank Document.

程序打开新窗口, 插入点定位于开始处.

1. 从窗口菜单中选择**水平排列**或**垂直排列**, 以便重新排列文档窗口的位置.

程序按要求重新排列文档窗口. 你已经开始学习本程序了.

> 从一个窗口移到另一窗口

- 在要移到的窗口处单击.

或

- 按Ctrl+Tab.

或

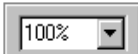
- 从窗口菜单所列的文档中选择所要的窗口编号.

激活的窗口标题栏是黑暗阴影的.

> 在屏幕中移动对话框

- 单击对话框标题对话框到新位置处.

> 改变工作视图

1. 在标准工具栏中单击  .
2. 输入你所需的缩放率.
3. 按Enter.

第二章 创建简单的文档

此练习表明开始使用本程序是多么的容易. 一步一步的指南解释如何打开文档及保存新建的文档. 如何使用缺省的文档模板创建简单的文档.

§ 2.1 创建新文档

通过练习, 打开新建的文档窗口.

1. [打开新建文档窗口](#), 选择窗口菜单下的水平排列或垂直排列重新排列已打开的文档.
2. 从文件菜单中选择保存, 输入你要保存的文件名称.

你能使用视窗接受的任何文件名. 程序文件自动添加文件后缀.tex.

3. 从视图菜单中选择工具栏, 单击Math Templates 及Math Objects (数学符号面板及数学对象), 选择关闭.

§ 2.2 输入首段

输入文档的首段语句及简短的列表.

2.2.1 输入段落内容

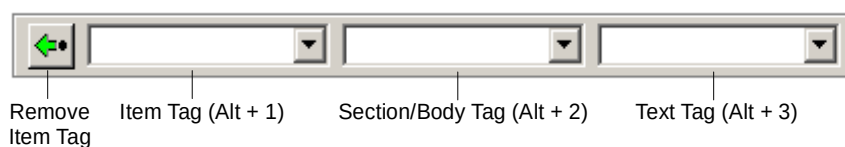
1. 单击新文档.
2. 输入首个段落:

欢迎您选用MacKichan公司的软件产品. Scientific WorkPlace, Scientific Word 及Scientific Notebook 是易学易用的科学字处理系统. 利用本软件, 您能

3. 按Enter.

2.2.2 输入列表

1. 单击列表特征，选择Bullet List Item.



左边出现圆点列表.

2. 输入

在同一屏幕内创建文本及数学表达式.

3. 按Enter.

左边出现第二个圆点列表.

4. 输入

在Scientific WorkPlace 与Scientific Notebook 中执行数学运算.

5. 按Enter.

左边出现第三个圆点列表.

6. 输入

Scientific WorkPlace 与Scientific Word 中的文档外观有两种：排版的文档与不排版的文档.

7. 按Enter.

左边出现第四个圆点列表.

8. 单击移除列表特征 , 结束圆点列表.

开始新的段落.

§ 2.3 输入第二段

第二段包含行中数学与独立数学两种不同放置的数学表达式. 可以如文本一样方便输入数学表达式.

2.3.1 输入行中数学

1. 输入

容易创建文档：使用屏幕上方的菜单命令、工具栏输入文本及数学表达式. 你能输入如下的行中数学表达式

2. 按space.

3. 使用键盘输入行中数学表达式：

- a) 按Ctrl+s, s.
- b) 按Ctrl+l 输入下标.
- c) 输入 $i=1$.
- d) 按Tab.
- e) 按Ctrl+s, Shift+I (i的大写字母) 输入 ∞ .
- f) 按空格键.
- g) 输入 n .
- h) 按s Ctrl+l (L的小写字母).
- i) 输入 i .
- j) 按空格键.

或使用鼠标：

- a) 确信Math Templates 及Math Objects toolbars 是开启的.
- b) 单击  .
- c) 单击  .
- d) 输入 $i=1$.
- e) 在表达式结束处单击定位插入点.
- f) 单击  .
- g) 单击自定义工具栏中的 ∞ .
- h) 在表达式结束处单击.
- i) 输入 n .

j) 单击  .

k) 输入i.

l) 在表达式结束处单击.

4. 在标准工具栏处单击数学/文本按钮  .

或

从插入菜单中选择文本.

或

按Ctrl+m 或Ctrl+t, 除非你改变了缺省设置.

5. 按space.

6. 输入剩余文本:

或独立数学表达式如以下放置:

2.3.2 输入独立数学

1. 单击数学对象工具栏中的  , 或从插入菜单中选择独立.

2. 如上指南的再次输入表达式.

注意程序自动将左侧的上标与下标设置成上部与下部的位置上.

3. 按右方向键或在独立数学外单击鼠标.

4. 按Enter结束段落.

§ 2.4 输入第三段

1. 完成文档的最后内容:

在线提供更多有用的信息. 按F1 或选择帮助菜单中的选项寻求帮助.

2. 从文件菜单中选择保存, 保存文件.

§ 2.5 预览及打印文档

你可以不排版预览你的文档. 然后在预览屏幕中打印文档.

1. 在标准工具栏中单击  , 或从文件菜单中选择**预览**.

在预览屏幕中显示你要打印的文档.

2. 用上下方向键滚动你的文档, 查看是否正确.

注意尽管没有输入任何格式化命令, 程序居中显示数学表达式, 设置运算符适当的间距.

3. 从文件菜单中选择**打印**.

4. 在打印对话框中设置参数.

5. 选择**确定**.

你能打印你预览所见一致的文档.

6. 如果你要结束预览窗口, 请选择**关闭**.

第三章 输入数学表达式

本章的实例说明如何用鼠标或键盘输入数学表达式. 建议你使用两种方法, 但心仪的方法还是键盘输入, 能加快你的工作使你成为熟手. 如果你要求助专门的数学解释, 可查找如下的副本用于自己的文档中.

§ 3.1 重要的事情先来

开始练习前, 按下列步骤:

1. 创建新文档.

如果指南隐藏在对话框后面, 则在开始前需移到对话框进行相应处理. 之后可在窗口间切换.

2. 定制文档窗口

> 定制文档窗口

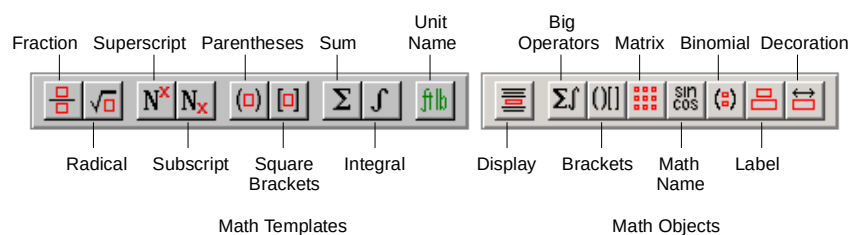
(1) 选择视图菜单, 检验隐藏、帮助行及输入框.

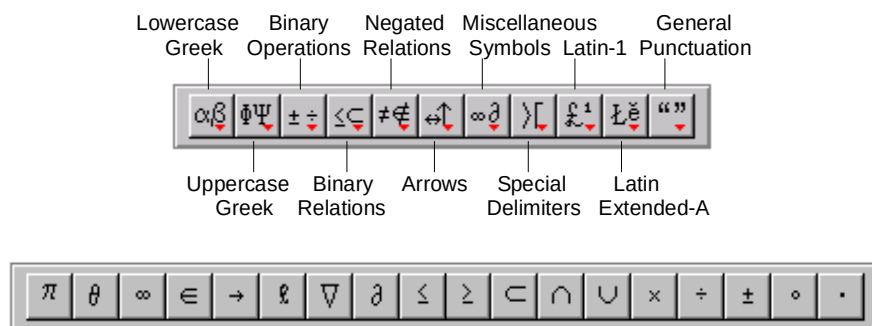
(2) 从视图菜单中选择工具栏.

(3) 检验Math Objects, Math Templates, and Symbol Panels, and Symbol Cache toolbars (数学对象、数学模板、符号面板及符号自定义工具栏).

(4) 选择关闭.

此时程序窗口将显示如下工具栏:





3. 在练习前进入数学输入状态.

> 开始设置数学状态

- 在标准工具栏中单击**数学/文本**按钮切换到  .
- 或
- 按Ctrl+m 或Ctrl+t 或Insert.
- 或
- 从**插入**菜单中选择**数学**.

> 返回到文本状态

- 在标准工具栏中单击**数学/文本**按钮切换到  .
- 按Ctrl+m 或Ctrl+t 或Insert.
- 或
- 从**插入**菜单中选择**文本**.

现在可以开始练习.

§ 3.2 符号与字符

$$\gamma + \nu \notin \Gamma$$

3.2.1 使用键盘

1. 按Ctrl+g, g
2. 输入+
3. 按Ctrl+g, n
4. 按Ctrl+s, E
5. 按Ctrl+g, G

3.2.2 使用鼠标

1. 在小写希腊字母面板  中, 单击 γ
2. 输入+
3. 在小写希腊字母面板  中, 单击 ν
4. 在二元关系不定符面板  中, 单击 $\nsubseteq$
5. 在大写希腊字母面板  中, 单击 Γ

§ 3.3 重音字符

$$\tilde{P}(\xi) / \tilde{P}^2(\xi)$$

3.3.1 使用键盘

1. 输入 $\tilde{P}(\xi)$:
 - a) 输入P
 - b) 按Ctrl+~
 - c) 输入(
 - d) 按Ctrl+g, x
 - e) 输入)
2. 复制 $\tilde{P}(\xi)$:

- a) 按Shift+left 四次
- b) 按Ctrl+c 以便复制
- c) 按**确定**

3. 创建 $\tilde{P}^2(\xi)$:

- a) 输入/
- b) 按Ctrl+v 以便粘贴
- c) 移动插入点至 $\tilde{P}$ 的左侧
- d) 按Ctrl+h 以便输入上标
- e) 输入 2

4. 按**确定**

3.3.2 使用鼠标

1. 输入 $\tilde{P}(\xi)$:

- a) 输入P
- b) 在标准工具栏上, 单击 
- c) 单击~
- d) 选择确定
- e) 输入(
- f) 在小写希腊字母面板  中, 单击 ξ
- g) 输入)

2. 创建 $\tilde{P}^2(\xi)$:

- a) 输入/
- b) 选择在斜杠左侧输入的内容
- c) 按住Ctrl, 单击鼠标, 将所选内容的副本拖动到斜杠的右侧, 然后释放Ctrl
- d) 在 $\tilde{P}$ 的右侧单击鼠标
- e) 在数学模板工具栏上, 单击 

f) 输入**2**

3. 单击表达式末尾

§ 3.4 粗体数学字符

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = z + 1$$

3.4.1 利用键盘

1. 输入 $(\nabla \times \mathbf{F})$:

- a) 按Alt+i, k
- b) 按(且按Enter 以进入输入模式
- c) 按Ctrl+s, n
- d) 按Ctrl+s, x
- e) 按F5 (缺省状态时该功能键指定为黑体)
- f) 输入**F**
- g) 按F4 (缺省状态时该功能键指定为普通模式)
- h) 按空格键

2. 输入 $\cdot \mathbf{k}$:

- a) 按Ctrl+s
- b) 输入一个乘号
- c) 按F5
- d) 输入**k**
- e) 按F4

3. 完成表达式:

- 输入**=z+1**

3.4.2 使用鼠标

1. 输入 $(\nabla \times \mathbf{F})$ ：

- a) 在数学模板工具栏上, 单击 
- b) 在符号快捷工具上, 单击 ∇
- c) 在二元运算符符号栏  上, 单击 $\times$
- d) 在编辑工具上, 单击 
- e) 输入 $\mathbf{F}$
- f) 在编辑工具上, 单击 
- g) 按空格键

2. 输入 $\cdot \mathbf{k}$ ：

- a) 在符号快捷工具上, 单击 $\cdot$
- b) 单击 
- c) 输入 $\mathbf{k}$
- d) 单击 

3. 完成表达式:

- 输入 $=\mathbf{z}+1$

§ 3.5 凸起的小圆点符

$$x_1 + \cdots + x_n$$

3.5.1 利用键盘

1. 输入 x_1 ：

- a) 输入 $\mathbf{x}$
- b) 按 $\text{Ctrl}+\text{l}$ (小写字母 l) 以便输入下标
- c) 输入 $\mathbf{1}$
- d) 按空格键

2. 输入 $+$
3. 按下Ctrl 且输入 cdots
4. 释放Ctrl
5. 输入 $+x_n$:
 - a) 输入 $+x$
 - b) 按Ctrl+l (小写字母L)
 - c) 输入 n
 - d) 按空格键

3.5.2 利用鼠标

1. 输入 x_1 :
 - a) 输入 x
 - b) 在数学模板工具栏上, 单击 
 - c) 输入1
 - d) 单击表达式结尾处
2. 输入 $+$
3. 在混合符号面板  中, 单击...
4. 输入 $+x_n$:
 - a) 输入 $+x$
 - b) 单击 
 - c) 输入 n
 - d) 单击表达式结尾处

§ 3.6 在线小圆点

$$(x_1, \dots, x_n)$$

3.6.1 利用键盘

1. 输入 x
2. 按Ctrl+l (小写字母L) 以便输入下标
3. 输入1
4. 按空格
5. 输入,
6. 按下Ctrl 且输入ldots
7. 释放Ctrl
8. 输入, x
9. 按Ctrl+l (小写字母L)
10. 输入n
11. 按空格
12. 输入)

3.6.2 利用鼠标

1. 输入 x
2. 在数学模板工具栏上, 单击 
3. 输入1
4. 单击表达式结尾处
5. 输入,
6. 在混合符号面板  中, 单击...
7. 输入, x
8. 单击 
9. 输入n

10. 单击表达式结尾处

11. 输入)

§ 3.7 上撇号

$$y_1' + y_2'' = Y'^2$$

3.7.1 利用键盘

1. 输入y

2. 按Ctrl+l (小写字母L) 以便输入下标

3. 输入1

4. 按空格键

5. 按上撇号

6. 输入+y

7. 按Ctrl+l (小写字母L)

8. 输入2

9. 按空格键

10. 按两次上撇号

11. 输入=Y

12. 按上撇号

13. 按Ctrl+h 以便输入上标

14. 输入2

15. 按空格键

3.7.2 利用鼠标

1. 输入 y
2. 在数学模板工具栏上, 单击 
3. 输入 1
4. 单击表达式结尾处
5. 单击 
6. 在混合符号面板  中, 单击 $/$
7. 单击表达式结尾处
8. 输入 $+y$
9. 单击 
10. 输入 2
11. 单击表达式结尾处
12. 单击 
13. 单击 $/$ 两次
14. 单击表达式结尾处
15. 输入 $=Y$
16. 单击 
17. 单击 $/$
18. 输入 2
19. 单击表达式结尾处

§ 3.8 下标与上标

$$a^2 + b_1$$

3.8.1 利用键盘

1. 输入**a**
2. 按Ctrl+h 以便输入上标
3. 输入**2**
4. 按空格键
5. 输入**+b**
6. 按Ctrl+l (小写字母L) 以便输入下标
7. 输入**1**
8. 按空格键

3.8.2 利用鼠标

1. 输入**a**
2. 在数学模板工具栏上, 单击 
3. 输入**2**
4. 单击表达式结尾处
5. 输入**+b**
6. 单击 
7. 输入**1**
8. 单击表达式结尾处

§ 3.9 具有下标与上标的下标或上标

$$a^{b^c} + x_{y^2}$$

3.9.1 利用键盘

1. 输入**a**
2. 按Ctrl+h 以便输入上标
3. 输入**b**
4. 按Ctrl+h
5. 输入**c**
6. 按空格键两次
7. 输入**+x**
8. 按Ctrl+l (小写字母L) 以便输入下标
9. 输入**y**
10. 按Ctrl+h
11. 输入**2**
12. 按空格键两次

3.9.2 利用鼠标

1. 输入**a**
2. 在数学模板工具栏上, 单击 
3. 输入**b**
4. 单击 
5. 输入**c**
6. 单击表达式结尾处
7. 输入**+x**
8. 单击 
9. 输入**y**

10. 单击 
11. 输入**2**
12. 单击表达式结尾处

§ 3.10 同侧的上标及下标

$$A_a^b$$

3.10.1 利用键盘

1. 输入**A**
2. 按Ctrl+l (小写字母L) 以便输入下标
3. 输入**a**
4. 按Tab
5. 输入**b**
6. 按空格键

3.10.2 利用鼠标

1. 输入**A**
2. 在数学模板工具栏上, 单击 
3. 输入**a**
4. 单击表达式结尾处
5. 单击 
6. 输入**b**
7. 单击表达式结尾处

§ 3.11 前侧下标及细小间距

$$x_2F_3$$

3.11.1 利用键盘

1. 输入x
2. 按Ctrl+, (逗号) 以便输入细间距
3. 按Ctrl+l (小写字母L) 以便输入下标
4. 输入2
5. 按空格键
6. 输入F
7. 按Ctrl+l (小写字母L)
8. 输入3
9. 按空格键

3.11.2 利用鼠标

1. 输入x
2. 在编辑工具栏上, 单击 
3. 单击细间距
4. 选择确定
5. 在数学模板工具栏上, 单击 
6. 输入2
7. 单击表达式结尾处
8. 输入F
9. 单击 

10. 输入**3**

11. 单击表达式结尾处

§ 3.12 限制的行中运算符及独立运算符

行内: $\sum_{i=1}^n a_i$

行间:
$$\sum_{i=1}^n a_i$$

3.12.1 利用键盘

1. 按**Ctrl+s**, **s**
2. 按**Ctrl+l** (小写字母**L**)
3. 输入**i=1**
4. 按**Tab**
5. 输入**n**
6. 按空格键
7. 输入**a**
8. 按**Ctrl+l** (小写字母**L**)
9. 输入**i**
10. 按空格键
11. 按**Shift+Home** 以选择表达式
12. 按**Ctrl+d** 以便得到行间表达式

3.12.2 利用鼠标

1. 在数学模板工具栏上, 单击 
2. 在数学模板工具栏上, 单击 
3. 输入 **i=1**
4. 单击表达式结尾处
5. 单击 
6. 输入 **n**
7. 单击表达式结尾处
8. 输入 **a**
9. 单击 
10. 输入 **i**
11. 选择表达式
12. 在数学对象工具栏上, 单击  以便得到行间表达式

§ 3.13 多行限制的运算符

行内: $\sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 < j < n}} P(i, j)$

行间:
$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 < j < n}} P(i, j)$$

3.13.1 利用键盘

1. 按 **Ctrl+s, s**
2. 按 **Ctrl+l** (小写字母L)
3. 输入 **0**
4. 按 **Ctrl+s, <**

5. 输入 i
6. 按Ctrl+s, <
7. 输入 m
8. 按Enter
9. 输入 $0 < j < n$
10. 按空格键两次
11. 输入 $P(i, j)$
12. 按Shift+Home 选择表达式
13. 按Ctrl+d 以便得到行间表达式

3.13.2 利用鼠标

1. 在数学模板工具栏上, 单击 
2. 在数学模板工具栏上, 单击 
3. 输入 0
4. 在符号快捷工具栏上, 单击 $\leq$
5. 输入 i
6. 再单击 $\leq$
7. 输入 m
8. 按Enter
9. 输入 $0 < j < n$
10. 单击表达式结尾处
11. 输入 $P(i, j)$
12. 选择表达式
13. 在数学对象工具栏上, 单击  以便得到行间表达式

§ 3.14 行中积分符与独立的积分符及修正后的积分符

行内: $\int_a^b f(s)dx$

行间: $\int_a^b f(s)dx$

编辑: $\int_a^b f(s)dx$

3.14.1 利用键盘

输入表达式:

1. 按Ctrl+i 以便输入积分
2. 按Ctrl+l (小写字母L)
3. 输入**a**
4. 按Tab
5. 输入**b**
6. 按空格键
7. 输入**f(s)dx**

行间表达式:

1. 按Shift+Home
2. 按Ctrl+d 以得到行间表达式

编辑表达式:

1. 移动插入点至f 的左侧
2. 按Ctrl+F5 以便打开运算特征对话框
3. 按Tab 移动限定位置框

4. 按向下尖头移动插入点至上方/下方
5. 按Enter
6. 按确定

3.14.2 利用鼠标

输入表达式:

1. 在数学模板工具栏上, 单击 
2. 在数学模板工具栏上, 单击 
3. 输入a
4. 单击表达式结尾处
5. 单击 
6. 输入b
7. 单击表达式结尾处
8. 输入f(s)dx

行间表达式:

1. 选择表达式
2. 在数学对象工具栏上, 单击 

编辑表达式:

1. 移动插入点至f 的左侧
2. 在标准工具栏上, 单击 
3. 单击上方/下方
4. 选择确定
5. 单击表达式结尾处

§ 3.15 二重积分与三重积分

行内: $\iiint_M d\omega = \iint_{\partial M} \omega$

行间: $\iiint_M d\omega = \iint_{\partial M} \omega$

3.15.1 利用键盘

1. 按下Ctrl 且输入**iiint** 以便得到三重积分
2. 释放Ctrl
3. 按Ctrl+l (小写字母L)
4. 输入**M**
5. 按空格键
6. 输入**d**
7. 按Ctrl+g, w
8. 输入=
9. 按下Ctrl 且输入**iint** 以便得到二重积分
10. 释放Ctrl
11. 按Ctrl+l (小写字母L)
12. 按Ctrl+s,d
13. 输入**M**
14. 按空格键
15. 按Ctrl+g, w
16. 按Shift+Home 以选择方程
17. 按Ctrl+d 以便得到行间方程

3.15.2 利用鼠标

1. 在数学对象工具栏上, 单击 
2. 双击 
3. 在数学模板工具栏上, 单击 
4. 输入M
5. 单击表达式结尾处
6. 输入d
7. 在小写希腊字母面板 , 单击ω
8. 输入=
9. 单击 
10. 双击 
11. 单击 
12. 在符号快捷工具栏上, 单击∂
13. 输入M
14. 单击表达式结尾处
15. 在小写希腊字母面板  中, 单击ω
16. 拖动鼠标选择表达式
17. 在数学对象工具栏上, 单击  以便得到行间方程

§ 3.16 简单分数

行内: $\frac{a+b}{2}$

行间:
$$\frac{a+b}{2}$$

3.16.1 利用键盘

1. 按Ctrl+f 输入分式
2. 输入**a+b**
3. 按Tab
4. 输入**2**
5. 按空格键
6. 按Shift+Home 以便选择分式
7. 按Ctrl+d 以便得到行间分式

3.16.2 利用鼠标

1. 在数学模板工具栏上, 单击 
2. 输入**a+b**
3. 单击分母
4. 输入**2**
5. 单击分式末尾
6. 拖动鼠标选择分式
7. 在数学对象工具栏上, 单击  以便得到行间分式

§ 3.17 繁分数

未调整大小: $\frac{x}{1 + \frac{x}{2}}$

调整大小: $\frac{x}{1 + \frac{x}{2}}$

3.17.1 利用键盘

1. 按Ctrl+d 创建行间表达式
2. 按Ctrl+f 以便输入分式
3. 输入 x
4. 按Tab
5. 输入 $1+$
6. 按Ctrl+f
7. 输入 x
8. 按Tab
9. 输入 2
10. 按空格键
11. 按Ctrl+F5 修改分式内部
12. 按Tab 移到大小处
13. 按向下箭头键移到的处
14. 按Enter
15. 按确定

3.17.2 利用鼠标

1. 在数学对象工具栏上, 单击 
2. 在数学模板工具栏上, 单击 
3. 输入 x
4. 单击分母
5. 输入 $1+$
6. 单击 

7. 输入 x
8. 单击分母
9. 输入 2
10. 单击分式内末尾
11. 在标准工具栏上, 单击 
12. 单击大的
13. 选择**确定**
14. 单击表达式结尾处

§ 3.18 连分数

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}}$$

如果增加文档视图中的放大率，您可能会发现此练习更容易完成。从“视图”菜单中，选择**定制**，设置放大率，选择**确定**。

3.18.1 利用键盘

1. 按 $\text{Ctrl}+\text{d}$ 以便创建行间表达式
2. 输入 a
3. 按 $\text{Ctrl}+\text{l}$ (小写字母L) 以便输入下标
4. 输入 0
5. 按空格键
6. 输入 $+$
7. 按 $\text{Ctrl}+\text{f}$ 输入分式
8. 输入 1

9. 按Tab
10. 输入a
11. 按Ctrl+l (小写字母L)
12. 输入1
13. 按空格键
14. 输入+
15. 按Ctrl+f
16. 输入1
17. 按Tab
18. 输入a
19. 按Ctrl+l (小写字母L)
20. 输入2
21. 按空格键
22. 输入+
23. 按Ctrl+f
24. 输入1
25. 按Tab
26. 输入a
27. 按Ctrl+l (小写字母L)
28. 输入3
29. 按空格键
30. 输入+
31. 按Ctrl+f

32. 输入1
33. 按Tab
34. 输入a
35. 按Ctrl+l (小写字母L)
36. 输入4
37. 按空格键两次
38. 按Ctrl+F5 修改分式特性
39. 按Tab 移到大小处
40. 按向下箭头键移到的处
41. 按Enter
42. 按空格键
43. 重复38—42 步骤三次

3.18.2 利用鼠标

1. 在数学对象工具栏上, 单击 
2. 输入a
3. 在数学模板工具栏上, 单击 
4. 输入0
5. 单击表达式结尾处
6. 输入+
7. 在数学模板工具栏上, 单击 
8. 输入1
9. 单击分母
10. 输入a

11. 单击 
12. 输入1
13. 单击分母结尾处
14. 输入+
15. 单击 
16. 输入1
17. 单击分母
18. 输入a
19. 单击 
20. 输入2
21. 单击分母结尾处
22. 输入+
23. 单击 
24. 输入1
25. 单击分母
26. 输入a
27. 单击 
28. 输入3
29. 单击分母结尾处
30. 输入+
31. 单击 
32. 输入1
33. 单击分母

34. 输入**a**

35. 单击 

36. 输入**4**

37. 单击最后分式右侧

38. 在标准工具栏上, 单击 

39. 单击**大的**

40. 选择**确定**

41. 单击下一个分式右侧

42. 重复38–41 步骤三次

§ 3.19 组合数

行内: $\binom{n}{k}$

行间: $\binom{n}{k}$

3.19.1 利用键盘

1. 按Alt+i, b 以便输入组合数
2. 按Alt+o
3. 按Alt+l (小写字母L) 且按Home
4. 按Enter
5. 输入**n**
6. 按Tab
7. 输入**k**
8. 按空格键

9. 按Shift+Home 选择表达式

10. 按Ctrl+d 得到行间表达式

3.19.2 利用鼠标

1. 在数学对象工具栏上, 单击 
2. 在分隔符的顶行单击(
3. 单击**没有**
4. 选择**确定**
5. 输入**n**
6. 单击下面的输入框
7. 输入**k**
8. 选择表达式
9. 在数学对象工具栏上, 单击  以便得到行间表达式

§ 3.20 括号

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.20.1 利用键盘

1. 按Ctrl+[以便输入方形括号
2. 按Ctrl+f 输入分式
3. 输入**x**
4. 按Tab
5. 输入**y**
6. 按**确定**

3.20.2 利用鼠标

1. 在数学模板工具栏上, 单击 
2. 在数学模板工具栏上, 单击 
3. 输入**x**
4. 单击分母
5. 输入**y**
6. 单击表达式结尾处

§ 3.21 不匹配的括号

$$x \in \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right]$$

3.21.1 利用键盘

1. 输入**x**
2. 按Ctrl+s, e
3. 按Alt+i, k 输入括号
4. 按Alt+l (小写字母L) 且按Home
5. 按Tab 移到第二行
6. 按右尖头移到]
7. 按Enter
8. 按Ctrl+f
9. 输入**a**
10. 按Tab
11. 输入**b**
12. 按空格键

13. 输入,
14. 按Ctrl+f
15. 输入c
16. 按Tab
17. 输入d
18. 按空格键两次

3.21.2 利用鼠标

1. 输入x
2. 在符号快捷工具栏上, 单击 $\in$
3. 在数学对象工具栏上, 单击 
4. 在分隔符的顶行单击(
5. 在行二行单击]
6. 选择确定
7. 在数学模板工具栏上, 单击 
8. 输入a
9. 单击分母
10. 输入b
11. 在] 前单击
12. 输入,
13. 单击 
14. 输入c
15. 单击分母
16. 输入d
17. 单击表达式结尾处

§ 3.22 左空括号

$$\left[\frac{dx}{dy} \Big|_{x=a} \right]^2$$

3.22.1 利用键盘

1. 按Ctrl+[输入方括号
2. 按Alt+i, k
3. 在分隔符的顶行按右尖头或左尖头键移到空括号 
4. 按Tab
5. 在分隔符的底行按左尖头移到|
6. 按Enter
7. 按Ctrl+f
8. 输入dx
9. 按Tab
10. 输入dy
11. 按空格键两次
12. 按Ctrl+l (小写字母L)
13. 输入x=a
14. 按空格键两次
15. 按Ctrl+h
16. 输入2
17. 按空格键

3.22.2 利用鼠标

1. 在数学对象工具栏上, 单击 
2. 行在顶单击[
3. 选择**确定**
4. 单击 
5. 在分隔符的顶行单击空括号 
6. 在底行单击|
7. 选择**确定**
8. 在数学模板工具栏上, 单击 
9. 输入**dx**
10. 单击分母
11. 输入**dy**
12. 单击| 的右侧
13. 在数学模板工具栏上, 单击 
14. 输入**x=a**
15. 单击] 的右侧
16. 单击 
17. 输入**2**
18. 单击表达式结尾处

§ 3.23 右空括号

$$x^2 / \frac{c+1}{d}$$

3.23.1 利用键盘

1. 输入 x
2. 按Ctrl+h
3. 输入 2
4. 按空格键
5. 按Alt+i, k
6. 按右尖头或左尖头键移到顶行/
7. 按Tab
8. 按右尖头键移到第二行空括号 
9. 按Enter
10. 按Ctrl+f
11. 输入 $c+1$
12. 按Tab
13. 输入 d
14. 按空格键两次
15. 按Shift+Home 选择表达式
16. 按Ctrl+d 得到行间表达式

3.23.2 利用鼠标

1. 输入 x
2. 在数学模板工具栏上, 单击 
3. 输入 2
4. 单击表达式结尾处
5. 在数学对象工具栏上, 单击 

6. 单击顶行 /
7. 单击第二行空括号 
8. 选择**确定**
9. 在数学模板工具栏上, 单击 
10. 输入**c+1**
11. 单击分母
12. 输入**d**
13. 单击表达式结尾处
14. 拖拉鼠标选择表达式
15. 在数学对象工具栏上, 单击  得到行间表达式

§ 3.24 具有根指数的根号

$$\sqrt[3]{x+y}$$

3.24.1 利用键盘

1. 按Ctrl+r 输入根式
2. 输入**x+y**
3. 按Tab
4. 输入**3**
5. 按空格键

3.24.2 利用鼠标

1. 在数学模板工具栏上, 单击 
2. 输入**x+y**
3. 单击根指数

4. 输入**3**
5. 单击表达式结尾处

§ 3.25 标签

$$A \overset{\alpha\beta}{\rightarrow} B$$

3.25.1 利用键盘

1. 输入**A**
2. 按Alt+i, L
3. 按Enter
4. 按Ctrl+s, 1
5. 按Tab
6. 按Ctrl+g, a
7. 按Ctrl+g, b
8. 按空格键
9. 输入**B**

3.25.2 利用鼠标

1. 输入**A**
2. 在数学对象工具栏上, 单击 
3. 选择**确定**
4. 在符号快捷工具栏上, 单击→
5. 单击标签框上方的尖头
6. 在小写希腊字母面板 , 单击 α
7. 在小写希腊字母面板 , 单击 β

8. 单击表达式结尾处

9. 输入**B**

§ 3.26 装饰符

$$\overline{x+y}$$

3.26.1 利用键盘

1. 按Alt+i, c

2. 按Home

3. 按Enter

4. 输入**x+y**

5. 按空格键

3.26.2 利用鼠标

1. 在数学对象工具栏上, 单击 

2. 双击 

3. 输入**x+y**

4. 单击表达式结尾处

§ 3.27 具有上标的装饰符

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

3.27.1 利用键盘

1. 按Alt+i, c

2. 按方向箭头, 以移动到 

3. 按Enter

4. 输入**AB**
5. 按空格键
6. 按Ctrl+h
7. 输入**2**
8. 按空格键
9. 输入=
10. 按Alt+i,c
11. 按Enter
12. 输入**AC**
13. 按空格键
14. 按Ctrl+h
15. 输入**2**
16. 按空格键
17. 输入 +
18. 按Alt+i,c
19. 按Enter
20. 输入**BC**
21. 按空格键
22. 按Ctrl+h
23. 输入**2**
24. 按空格键.

3.27.2 利用鼠标

1. 在数学对象工具栏上, 单击 
2. 双击 
3. 输入**AB**
4. 单击表达式结尾处
5. 在数学模板工具栏上, 单击 
6. 输入**2**
7. 单击表达式结尾处
8. 输入**=**
9. 在数学对象工具栏上, 单击 
10. 选择**确定**
11. 输入**AC**
12. 单击表达式结尾处
13. 单击 
14. 输入**2**
15. 单击表达式结尾处
16. 输入**+**
17. 单击 
18. 选择**确定**
19. 输入**BC**
20. 单击表达式结尾处
21. 单击 
22. 输入**2**
23. 单击表达式结尾处

§ 3.28 下括号、标签及突起小圆点

$$\underbrace{x + \cdots + x}_{k \text{ times}}$$

3.28.1 利用键盘

1. 按Alt+i, L
2. 按向下尖头键移到向下
3. 按Enter
4. 按Alt+i, c
5. 按方向尖头键移到 
6. 按Enter
7. 输入x+
8. 按下Ctrl 且输入cdots
9. 释放Ctrl
10. 输入+x
11. 按Tab
12. 输入k
13. 按Ctrl+t 以便输入文本
14. 按空格键
15. 输入times
16. 按右方向尖头

3.28.2 利用鼠标

1. 在数学对象工具栏上, 单击 
2. 单击向下
3. 选择**确定**
4. 在数学对象工具栏上, 单击 
5. 双击 
6. 输入**x+**
7. 在混合符号面板 , 单击...
8. 输入**+x**
9. 单击支架下方的输入框中
10. 输入**k**
11. 单击  切换到文本
12. 按空格键
13. 输入**times**
14. 单击表达式结尾处

§ 3.29 简单形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

3.29.1 利用键盘

1. 按Alt+i, x
2. 输入**2**
3. 按Tab
4. 输入**3**

5. 按Tab 切换到“内置分隔符”区域的选项卡
6. 按向下尖头键选择括号
7. 按Enter
8. 输入**a**
9. 按Tab
10. 输入**b**
11. 按Tab
12. 输入**c**
13. 按Tab
14. 输入**d**
15. 按Tab
16. 输入**e**
17. 按Tab
18. 输入**f**
19. 按**确定**
20. 如果矩阵引导线处于打开状态，按Alt+v, h 以隐藏; 记得在下个练习打开开关

3.29.2 利用鼠标

1. 在数学对象工具栏上, 单击 
2. 单击向上或向下尖头至行框右侧定制2行
3. 单击向上或向下尖头至列框右侧定制3列
4. 检验括号(m)
5. 选择**确定**
6. 输入**a**

7. 单击右侧下一单元
8. 输入**b**
9. 单击右侧下一单元
10. 输入**c**
11. 单击知二行首单元
12. 输入**d**
13. 单击右侧下一单元
14. 输入**e**
15. 单击右侧下一单元
16. 输入**f**
17. 单击表达式结尾
18. 如果矩阵引导线处于打开状态，请取消选中“视图”菜单上的帮助行以隐藏它们。记得在下一个练习中重新打开

§ 3.30 向量

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

3.30.1 利用键盘

1. 按Alt+i, x
2. 输入**3**
3. 按Tab
4. 输入**1**
5. 按Tab 键切换到“内置分隔符”区域的选项卡

6. 按向下尖头键选择括号
7. 按Enter
8. 输入 y
9. 按Ctrl+l (小写字母L)
10. 输入1
11. 按空格键
12. 按向下尖头键
13. H按下Ctrl 且输入 $\vdots$
14. 释放Ctrl
15. 按向下尖头键
16. 输入 y
17. 按Ctrl+l (小写字母L)
18. 输入 n
19. 按确定
20. 如果矩阵引导线打开, 按Alt+v, h 以隐藏它们; 记得下个练习打开

3.30.2 利用鼠标

1. 在数学对象工具栏上, 单击 
2. 单击向上或向下尖头至行框右侧定制3行
3. 单击向上或向下尖头至列框右侧定制1列
4. 检验括号(m)
5. 选择确定
6. 输入 y
7. 在数学模板工具栏上, 单击 

8. 输入1
9. 单击下一个单元
10. 在混合符号面板 , 单击:
11. 单击下一个单元
12. 输入y
13. 单击 
14. 输入n
15. 单击表达式结尾处
16. 如果矩阵引导线处于打开状态, 请取消选中“视图”菜单上的帮助行以隐藏它们. 记得在下一个练习中重新打开

§ 3.31 分段函数

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{for } x > 1 \\ 0 & \text{for } x \leq 1 \end{cases}$$

3.31.1 利用键盘

1. 输入 f(x)=
2. 按Alt+i, k
3. 按向右尖头键移到顶行的{
4. 按Tab

5. 按向右尖头键移到行二行空括号 

6. 按Enter

打开帮助引导行时, 屏幕上会出现空括号, 但不会在打印中显示.

7. 按Alt+i, x
8. 输入2

9. 按Tab
10. 输入2
11. 按Tab 切换到“内置分隔符”区域的选项卡
12. 选择没有
13. 按Enter
14. 输入 $(x-1)$
15. 按Ctrl+h
16. 输入3
17. 按空格键
18. 按Tab
19. 按Ctrl+t 切换到文本
20. 输入for
21. 按空格键
22. 按Ctrl+m 切换到数学
23. 输入 $x>1$
24. 按Tab
25. 输入0
26. 按Tab
27. 按Ctrl+t 切换到文本
28. 输入for
29. 按空格键
30. 按Ctrl+m 切换到数学
31. 输入x

32. 按Ctrl+s, <
33. 输入1
34. 按空格键
35. 按Ctrl+F5
36. 按向上尖头键到左括号
37. 按Enter
38. 按空格键
39. 如果矩阵引导线处于打开状态, 请取消选中“视图”菜单上的帮助行以隐藏它们. 记得在下一个练习中重新打开

3.31.2 利用鼠标

1. 输入 $f(x)=$
2. 在数学对象工具栏上, 单击 
3. 单击顶行{
4. 单击第二行空括号 
5. 选择确定
6. 在数学对象工具栏上, 单击 
7. 单击向上或向下尖头至行框右侧定制2行
8. 单击向上或向下尖头至列框右侧定制2列
9. 单击左对齐
10. 在“内置分隔符”区域的选项卡, 检验没有
11. 选择确定
12. 输入 $(x-1)$
13. 在数学模板工具栏上, 单击 

14. 输入3
15. 单击右侧的下个框
16. 单击  切换到文本
17. 输入for
18. 按空格键
19. 单击  切换到数学
20. 输入 $x>1$
21. 单击第二行的首个框
22. 输入0
23. 单击右侧下一个框
24. 单击  切换到文本
25. 输入for
26. 按空格键
27. 单击  切换到数学
28. 输入 x
29. 在符号快捷工具栏上, 单击 $\leq$
30. 输入1
31. 单击表达式结尾处
32. 如果矩阵引导线处于打开状态, 请取消选中“视图”菜单上的帮助行以隐藏它们. 记得在下一个练习中重新打开

§ 3.32 另一形式的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} x - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & x - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & x - \lambda \end{pmatrix}$$

3.32.1 利用键盘

1. 输入 $\mathbf{A=}$
2. 按Alt+i, x
3. 输入 $\mathbf{3}$
4. 按Tab
5. 输入 $\mathbf{3}$
6. 按Tab 键移动到内置分隔符的选项卡
7. 按向下尖头键选择括号(m)
8. 按Enter
9. 输入 $\mathbf{x-}$
10. 按Ctrl+g, l (小写字母L)
11. 按Shift 键且按向左尖头键选择 $x - \lambda$
12. 按Ctrl+c
13. 按右尖头键
14. 按Tab
15. 输入 $\mathbf{1}$
16. 按Tab
17. 输入 $\mathbf{0}$
18. 按Tab
19. 输入 $\mathbf{0}$
20. 按Tab
21. 按Ctrl+v
22. 按Tab

23. 输入1
24. 按Tab
25. 输入0
26. 按Tab
27. 输入0
28. 按Tab
29. 按Ctrl+v
30. 按确定
31. 如果矩阵引导线处于打开状态，请取消选中“视图”菜单上的帮助行以隐藏它们。记得在下一个练习中重新打开

3.32.2 利用鼠标

1. 输入 $A=$
2. 在数学对象工具栏上, 单击 
3. 单击向上或向下尖头至行框右侧定制3行
4. 单击向上或向下尖头至列框右侧定制3无影
5. 在“内置分隔符”区域的选项卡, 检验括号(m)
6. 选择确定
7. 输入 $x-$
8. 在小写希腊字母面板 , 单击 λ
9. 拖动鼠标选择 $x - \lambda$
10. 从编辑菜单, 选择复制
11. 单击顶行中心单元
12. 输入1

13. 单击右侧下个单元
14. 输入0
15. 单击第二行首个单元
16. 输入0
17. 单击右侧下个单元
18. 从编辑菜单, 选择粘贴
19. 单击右侧下个单元
20. 输入1
21. 单击第三行首个单元
22. 输入0
23. 单击右侧下个单元
24. 输入0
25. 单击右侧下个单元
26. 从编辑菜单中, 选择粘贴
27. 单击表达式末尾
28. 如果矩阵引导线条处于打开状态, 请取消. 选中“视图”菜单上的帮助行以隐藏它们. 记得在下一个练习中重新打开引导线条.

§ 3.33 函数

行内: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

行间: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

3.33.1 利用键盘

1. 输入 $f(x)=\lim$
2. 按Ctrl+l (小写L)
3. 输入 n
4. 按Ctrl+s, 1
5. 按Ctrl+s, I (大写i)
6. 按空格键
7. 输入 x
8. 按Ctrl+l (小写L)
9. 输入 n
10. 按空格键
11. 按Shift+Home 以选择表达式
12. 按Ctrl+d 以独立显示表达式

3.33.2 利用鼠标

1. 输入 $f(x)=$
2. 在数学对象工具栏上, 单击 
3. 向下滚动到 $\lim$
4. 双击 $\lim$
5. 在数学模板工具栏上, 单击 
6. 输入 n
7. 在符号缓存工具栏上, 单击 $\rightarrow$
8. 在符号缓存工具栏上, 单击 ∞
9. 单击表达式末尾

10. 输入 x

11. 单击 

12. 输入 n

13. 选择此表达式

14. 在数学对象工具栏上，单击  以独立显示表达式

第四章 打印与排版

在SWP及SW中，你创建的文档有两种方式：排版的文档及不排版的文档。本练习说明排版与不排版的文档最终的不同外观。按步骤的指南解释如何创建包含表格的单页文档，如何创建标题及改变文本的外观。练习文档结束后显示排版与不排版的打印结果。因为在SNB中没有排版功能，故SNB文档的外观等同于不排版的实例。

§ 4.1 新建文档

新建文档以便进行练习。

1. 单击 ，或从文件菜单中选择**新建**。
2. 选择文档模板：
 - 在SWP或SW中，从文档模板目录中选择Standard LaTeX，再选择模板文件为Blank - Standard LaTeX Article.
 - 或
 - 在SNB中，从文档模板目录中选择General，再选择模板文件为Blank Document.
3. 选择**确定**。
4. 如果你是从在线指南开始工作，则从窗口菜单中选择**水平排列或垂直排列**。

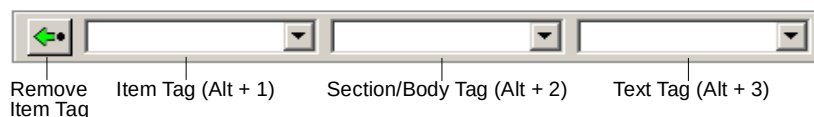
按照指南程序放置两个文档窗口。

如果需要从一个窗口移到另一窗口，可按Ctrl+Tab，可单击所在的文档窗口。从窗口菜单所列的文档中选择所要的窗口编号。激活的窗口标题栏是黑暗阴影的。

§ 4.2 输入文档标题

你可利用特征为首个段落输入标题.

1. 从特征工具栏中单击节或体特征.



2. 在特征列表中选择section或Heading 1.

3. 输入标题:

创建文档

4. 按Enter.

§ 4.3 输入首个段落

1. 输入首个段落:

此版本的Scientific WorkPlace 及Scientific Word 提供如下方式创建文档:

2. 按space.

3. 在特征工具栏中单击文本特征.

4. 在此特征列表中选择Emphasized, 再输入

打印

5. 在编辑工具栏中单击 .

或

在文本特征列表中选择Normal.

或

按F4, 缺省指定到Normal 特征.

6. 按space, 再输入

且

7. 按space.
8. 在Text 特征列表中选择Emphasized, 再输入
排版打印.
9. 按space, 按F4, 新一行中再输入:
两种方式产生不同的文档打印外观.
10. 按Enter.

§ 4.4 开始第二节

1. 开始新的一节:
 - a) 在特征列表中选择subsection或Heading 2.
 - b) 输入
打印与排版打印
 - c) 按Enter.
2. 开始段落. 输入:

如果你打印不排版的文档, 程序使用常规程式传送文档到打印机, 打印的结果与程序窗口中显示的
3. 按space.
4. 在特征工具栏中单击文本特征.
5. 在此特征列表中选择Italics, 再输入:

基本一致.
6. 按space, 按F4, 新一行中再输入:

程序使用样式文件、页面设置及打印设置初始化应用模板创建的文件.
7. 按Enter.
8. 开始下个段落. 输入:

如果你排版打印文档, 程序将用LaTeX相关程序编译文档, 排版提供自动格式化的特色: 断字, 字距、连字、复杂的段落和行中断. 也提供文档按要求自动生成的目录、索引、节与方程编号, 交叉参考等. 因此, 你排版打印的文档与程序窗口中的文档是

9. 按space.
10. 在特征工具栏中单击**文本特征**.
11. 在此特征列表中选择**Italics**, 再输入:

不同的.

12. 按space, 按F4, 新一行中再输入:

程序使用模板文件及文档附带的宏包、设置等排版规格进行格式化文档.

§ 4.5 输入包含表格的段落

1. 按Enter开始输入段落内容:

你能在帮助系统的查找更多有关打印及排版打印的信息. 表格归结了打印与排版打印的不同:

2. 按Enter.

3. 创建表格:

a) 从**视图**菜单中开启**帮助行**及**输入框**. 这有助于可视化创建表格.

b) 在标准工具栏中单击 , 或从**插入**菜单中选择**表格**.

c) 行数输入**5**, 按Tab, 列数输入**2**, 选择**确定**.

4. 输入表格第一行的内容:

a) 在特征工具栏中单击**文本特征**.

b) 在特征列表中选择**Bold**, 再输入:

打印文档

c) 按Tab.

d) 在特征工具栏中单击**文本特征**选择**Bold**, 再输入

排版打印文档

5. 第一行的下划线:

a) 选择此行.

b) 在标准工具栏中单击 , 或从**编辑**菜单中选择**特性**.

- c) 单击**线活页夹**.
 - d) 检验**单线**，再检验**底部**.
 - e) 选择**确定**.
6. 输入第二行：
- a) 单击第二行的开始单元.
 - b) 输入：
外观相似于屏幕显示
 - c) 按Tab.
 - d) 输入：
外观不同于屏幕显示
7. 输入第三行：
- a) 按Tab
 - b) 输入：
不用LaTeX排版
 - c) 按Tab.
 - d) 输入：
用LaTeX排版
8. 输入第四行：
- a) 按Tab
 - b) 输入：
使用样式
 - c) 按Tab.
 - d) 输入：
使用排版专门化
9. 输入最后一行：
- a) 按Tab

b) 输入:

不包括产生的元素

c) 按Tab.

d) 输入:

包括产生的元素

10. 按右方向键.

如下的表用帮助行、输入框围绕每个单元勾画出:

打印文档	排版打印文档
外观相似于屏幕显示	外观不同于屏幕显示
不用LaTeX排版	用LaTeX排版
使用样式	使用排版专门化
不包括生成的元素	包括生成的元素

§ 4.6 输入最后一节

1. 开始新的一节:

a) 按Enter.

b) 在节或体特征列表中选择subsection或Heading 2.

c) 输入

如何处理文档

d) 按Enter.

2. 输入:

按照指南处理你的文档:

3. 按Enter.

4. 单击特征工具栏中的列表特征, 选择Bullet List Item.

左边出现圆点列表.

5. 输入

为了打印你的文档, 选择文件菜单中的打印.

6. 按Enter.

左边出现第二个圆点列表..

7. 输入

从排版菜单中选择排版打印你的文档.

8. 按Enter.

9. 要结束列表, 单击特征工具栏中移除特征列表 .

§ 4.7 保存文档

1. 在标准工具中单击 , 或从文件菜单中选择保存.

2. 输入文件名称.

3. 选择保存.

§ 4.8 打印不排版的文档

1. 在标准工具栏中单击 , 或从文件菜单中选择打印.

2. 选择你所需的打印机.

3. 选择**确定**.

你打印输出的文档如下所示:

Producing a Document

This version of Scientific WorkPlace and Scientific Word provides two ways to produce a document: *printing* and *typeset printing*. The two methods produce different results.

Printing and Typeset Printing

If you print a document without typesetting it, the program sends the document to the printer using many of the same routines with which it sends the document to the program window. What you see on paper and what you see in the program window are *similar*. The program formats the document using the style page setup, and print options that are set initially by the shell you use to create the document.

If you typeset print a document, the program compiles the document with LaTeX to create a finely typeset version of the document. Typesetting offers automatic formatting features such as hyphenation, kerning, ligatures, and sophisticated paragraph and line breaking. It also provides automatic generation of document elements including tables of contents, indexes, numbered sections and equations, and cross-references. Therefore, what you see on paper and what you see in the program window are usually quite *different*. The program formats the document using the typesetting specifications set by the shell, along with any packages and options you may have added to your document.

You can find much more information about printing and typesetting in the online Help system. This table summarizes the differences between printing and typeset printing:

Printed Documents	Typeset Printed Documents
Appear similar to screen display	Appear different from screen display
Are not processed with LaTeX	Are processed with LaTeX
Use style	Use typesetting specifications
Don't include generated elements	Include generated elements

How to Produce a Document

Produce your document according to these instructions:

- To print your document, choose Print from the File menu.
- To typeset print your document, choose Print from the Typeset menu.

§ 4.9 打印排版的文档

如果你使用SWP 或SW, 你可以打印用LaTeX排版的文档.

1. 在排版工具栏中单击  , 或从排版菜单中选择打印.
2. 如果你要设置一个不同的打印机, 选择设置以便打印机专门化, 选择确定.
3. 选择确定.

当文档编译时, 程序显示LaTeX对话框, 打印设备独立的 (DVI) 文件或PDF文件. 你排版打印输出的文档如下所示:

1 Producing a Document

This version of Scientific WorkPlace and Scientific Word provides two ways to produce a document: *printing* and *typeset printing*. The two methods produce different results.

1.1 Printing and Typeset Printing

If you print a document without typesetting it, the program sends the document to the printer using many of the same routines with which it sends the document to the program window. What you see on paper and what you see in the program window are *similar*. The program formats the document using the style, page setup, and print options that are set initially by the shell you use to create the document.

If you typeset print a document, the program compiles the document with LaTeX to create a finely typeset version of the document. Typesetting offers automatic formatting features such as hyphenation, kerning, ligatures, and sophisticated paragraph and line breaking. It also provides automatic generation of document elements including tables of contents, indexes, numbered sections and equations, and cross-references. Therefore, what you see on paper and what you see in the program window are usually quite *different*. The program formats the document using the typesetting specifications set by the shell, along with any packages and options you may have added to your document.

You can find much more information about printing and typesetting in the online Help system. This table summarizes the differences between printing and typeset printing:

Printed Documents	Typeset Printed Documents
Appear similar to screen display	Appear different from screen display
Are not processed with LaTeX	Are processed with LaTeX
Use style	Use typesetting specifications
Don't include generated elements	Include generated elements

1.2 How to Produce a Document

Produce your document according to these instructions:

- To print your document, choose Print from the File menu.
- To typeset print your document, choose Print from the Typeset menu.

§ 4.10 比较排版与不排版的文档

虽然你没有改变文档，但程序格式化你的文档过程及方法不同。马上会注意到两种不同的输出结果。看看边距、对齐方式、字体和字体大小的变化。排版的文档自动具有了页码、节编号及连字符的文本。

第一部分中（[创建新的文档](#)），你创建了具有Standard LaTeX Article 及Blank Document 模板的文档。正如所有的模板一样，这些模板具有打印的样式及排版专门化的设置。你看到的两种打印结果是两种不同的设置所决定的。

第五章 创建高级文档

本练习说明在SWP及SW中如何创建结构化排版的高级文档. 下面的2页文档是数学文章, 包含行中公式及独立公式; 一个定理、一个命题及一个推论, 一个实例、几个数学对象, 其中有矩阵、根式及分式.

文章的许多元素由排版过程生成, 包含文档标题、目录表、摘要、节标题及脚注, 还具有交叉参考、参考文献、编号的方程及定理、文档分节. 如果在SNB编写文档, 则不具备排版功能.

完成此练习大约需要90分钟, 假定你具有视窗约定的相关知识. 如果你是新手, 在开始前推荐你复习一下相关的视窗文档.

由于你创建的文档包含方程, 练习中也有直截了当的说明及数学的编辑, 但是说明中不包含输入数学的细节. 如果你要求助如何输入数学, 请参考[输入数学表达式](#)一章, 从指南中的练习或通过[帮助](#)系统获取信息.

§ 5.1 创建新文档

使用模板文件创建样例文档, 该模板的格式化相似于美国数学协会公报 (Bulletin of the American Mathematical Society) 的文章. 对模板的排版专门化具有连续编号的定理、引理、命题及推论.

以下的指南开始你的文档. 记住如果你是在线工作, 你新建的文档将覆盖这些指南. 拖拉新窗口到合适的位置或应用窗口菜单重新排列两个窗口以便看到指南.

1. 在标准工具栏中单击  , 或从文件菜单中选择**新建**.
2. 从文档模板目录列表中选择Articles.
3. 从模板列表中选择Bulletin of the American Mathematical Society (Similar).
4. 选择**确定**.

程序打开新文档窗口, 模板文件正如你选择的.

5. 在标准工具栏中单击  , 或从文件菜单中选择**保存**或**另存为**, 以保存你创建的文件.

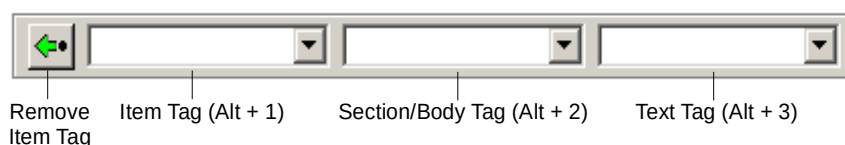
6. 输入样例文档的文件名.

你可使用任何兼容的视窗文件名.

7. 选择**保存**.

8. 删除有关模板文档中的信息: 从**编辑**菜单中选择**全选**, 按Delete.

9. 从**节或体特征**列表中单击Body Text.



10. 从**视图**菜单中, 开启**隐藏**、**帮助行**、**输入框**及**标记域**.

11. 从**视图**菜单中, 选择**工具栏**.

12. 检验输入set Editing, 输入set Object, 及Field, 选择**关闭**.

§ 5.2 创建文档头

对于你的样例文档, 文章标题、日期、摘要及目录表称作文档头的内容. 在文档头对话框中输入这些域的信息.

当你打开文档头对话框, 你看到文档模板指定的一系列域的信息. 为了创建文档头, 可替换已建立的这些域中相关信息完成这个练习.

5.2.1 打开文档头并输入你的姓名

1. 在排版工具栏中单击  , 或从**排版**菜单中选择**文档头**.
2. 定位插入点到表示作者的阴影框的右侧: 单词*The Author*的左侧.
3. 选择*The Author*.
4. 输入你的姓名.

5.2.2 输入第二个作者姓名

此文章有第二个作者, 故必须创建作者的另一个域.

1. 按Enter.

2. 在此域末尾处, 在特征工具栏上单击 .

3. 单击特征工具栏上的**列表特征**.

4. 选择Author.

阴影框标记为Author: 开始新的作者域.

5. 输入第二个作者的姓名:

Roger H. Hunter

5.2.3 输入标题与日期

1. 选择*The Title of an Article for the Bulletin of the AMS*且用如下的词替换:

简单的数学文章

2. 选择*The Date*且用今天的日期替换, 使用你所要的日期格式.

3. 在Make Title 中不要输入任何内容. 此域告知程序排版时生成文章的标题页.

5.2.4 输入摘要

在程序窗口中你能使用全部特色, 输入摘要, 从文本切换到数学状态:

- 在标准工具栏单击  切换到数学.
- 在标准工具栏单击  切换到文本.

注意在段落开始处你不必输入单词*Abstract*. 模板自动在摘要开始插入单词*Abstract*.

在这个实例中, 正如程序处理的那样, 数学变量以斜体出现. 你不必将字体设置为斜体. 当你切换到数学状态后, 程序自动建立字体的数学表达式为斜体.

为使数学字体变粗, 在编辑工具栏中单击  或按F5 (功能键缺省设置文本特征为Bold), 输入字符, 再在编辑工具栏中单击  或按F4 (文本特征为Normal).

1. 选择原摘要的文本并替换成所要的摘要内容.

2. 输入段落内容, 如必要从文本切换到数学:

本文说明了数学文章的许多特色. 包含了文章结构的全部元素, 诸如文档头、节编号、交叉参考及参考文献等. 我们既没有给出 $S(F_4)$ 及 $S(F_4)^v$ 作为方程组的仿射根的麦克唐纳德常数项猜想的证明, 也没有在摘要中解释公式 $(\nabla \times F) \cdot k = z + 1$ 的虚假外观.

5.2.5 生成目录表

当你排版文档时，程序自动使用节标题生成目录表（缩写词TOC）。为了程序打印出目录表，你必须插入类似于标题域的专门的域。

1. 确信你的插入点正好位于摘要的结束处。
2. 按Enter。
3. 在**列表特征**工具栏中选择Make TOC。
4. 选择**确定**。

文档头不会出现在程序窗口显示的文档中，但你在排版预览文档时可以见到。

§ 5.3 创建第1节

样例文章含有4节内容。每节包含其他部分文档的参考，具有脚注或参考文献项。当你排版时程序使用节标题生成目录表。

第1节包含文本及数学表达式。如果你要了解如何输入数学，请参考指南中练习[输入数学表达式](#)或帮助系统。

5.3.1 输入节标题

1. 在**节或体特征**列表中选择Section。
2. 输入

数学与文本

注意你不必输入节编号，程序在排版时自动生成节的编号。

3. 按Enter 结束段落标题。

你输入的标题在窗口中以大于正文字号并具有背景阴影来显示。记住屏幕的文档外观不同于排版打印的外观。

5.3.2 输入段落内容

本段落包含数学与文本，结尾处引用第一个参考文献。

1. 输入段落内容，如必要从文本切换到数学：

令 H 是 Hilbert 空间, C 是 H, T 的非扩张自映射的闭有界凸子集. 对于任意的 k , 假定 $n \rightarrow \infty$, $a_{n,k} \rightarrow 0$ 且 $\gamma_n = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n,k+1} - a_{n,k})^+ \rightarrow 0$. 那么对于每个 $x \in C$, $A_n x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} T^k x$ 弱收敛到 T 的一个不动点.

2. 输入引用:

a) 在排版对象工具栏上单击  , 从插入菜单中选择排版对象|引用.

b) 在关键词框中输入

dunford

你将在最后的参考文献项中使用此关键词.

c) 选择确定.

d) 程序窗口显示包含你引用关键词的小的灰色框.

3. 输入必要的语句结束本段.

4. 按Enter.

§ 5.4 创建第2节

第2节说明行中数学与包含方程编号的独立数学.

5.4.1 输入节标题

1. 在节或体特征列表中选择Section.

2. 输入

行中数学与独立数学

3. 按Enter.

5.4.2 输入首个段落

1. 输入段落的第一部分内容, 必要时从文本切换到数学:

表达式 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 是行中数学, 如下是独立数学:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

单独占据一行, 居中显示. 考虑将下列公式编号:

$$u_{tt} - \Delta u + u^5 + u|u|^{p-2} = 0 \text{ in } \mathbf{R}^3 \times [0, \infty[.$$

2. 将方程编号:

- a) 插入点定位于最后的独立数学的右侧外面.
- b) 在标准工具中单击  , 或从**编辑**菜单中选择**特性**.
- c) 在编号栏下检验**定制**.
- d) 在关键词框中输入

wave

你将在下一句中使用关键词创建方程的参考, 引用该方程.

- e) 选择**确定**.

程序窗口显示方程右侧包含# 的小的阴影框. 当你排版文档时, 程序自动用方程编号替换.

5.4.3 输入最后段落

下一句包含方程编号的交叉参考. 当你排版时, 程序自动创建正确的编号引用该方程.

1. 输入

在整个空间上求解, 尽管是非线性方程的解.

2. 按space.

3. 增加方程参考:

- a) 在排版对象工具中单击  , 或从**插入**菜单中选择**排版|交叉参考**.
- b) 在关键词框中输入

wave

- c) 选择**确定**.

显示包含`ref:wave`的交叉参考的域框, 且**wave**的键值应是方程的编号. 当你排版文档时, 程序自动生成所指的方程编号代替`wave`.

4. 输入必要的语句结束本段.

5. 按Enter.

§ 5.5 创建第3节

第3节包含脚注. 也说明定理、命题、推论的使用, 例子使用了列表特征中的相关特征.

5.5.1 输入节标题

在文档中你需要参考标题，故应该增加参考标题的关键词。

1. 在节或体特征列表中选择Section.

2. 输入

Theorems, Lemmas, 等等.

3. 按Enter.

4. 本节增加关键词：

a) 在域工具栏中单击 ，或从插入菜单中选择标记.

b) 在关键词框中输入

theorems

c) 选择确定.

阴影框包含*marker:* 及关键词theorems.

5.5.2 输入首个段落

1. 输入：

你能自动生成定理及其他声明的编号.

2. 在句子结尾输入脚注：

a) 在域工具栏中单击 ，或从插入菜单中选择注释.

确信在注释类型中选择footnote.

b) 要输入区中输入脚注内容：

如命题，引理和推论.

c) 选择确定.

阴影框包含*footnote.*

3. 按Enter.

5.5.3 输入最后段落

因为在文档中陈述定理后要参考，你需要确定定理陈述的关键词。定理陈述也包含交叉参考。

1. 在列表特征中选择Theorem.

程序显示包含Theorem 的域框。当你排版文档时自动生成定理语句的序列号替代域框中Theorem.

2. 确定定理陈述关键词：

a) 在域工具栏中单击 ，或从插入菜单中选择标记。

b) 在关键词框中输入：

existence

你可在后面使用关键词参考此定理。

c) 选择确定。

3. 输入定理，再切换文本到数学输入数学表达式及独立数学，无需你设定，程序自动将数学符号设成斜体。输入：

假定 $u_0 \in C^3(\mathbf{R}^3), u_1 \in C^2(\mathbf{R}^3)$ 有有限能量且

$$\int_{\mathbf{R}^3} \left(\frac{|u_1|^2 + |\nabla u_0|^2}{2} + \frac{|u_0|^6}{6} \right) dx < \infty$$

再假定齐次波动方程具有初始值 u_0, u_1 的解 $u^{(0)}$ 是一致有界的，则存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得 $|\epsilon| < \epsilon_0$

4. 按space

5. 输入交叉参考：

a) 键入左括号。

b) 在排版对象工具栏中单击 ，或从插入菜单中选择排版对象|交叉参考。

c) 在关键词框中输入：

wave

d) 选择确定。

e) 键入右括号。

6. 要完成句子，输入：

对于具有初值 $\epsilon u_0, \epsilon u_1$ 具有全局 C^2 -解。

7. 按Enter 结束段落.

8. 单击  结束定理陈述.

5.5.4 输入命题内容

1. 在列表特征中单击Proposition.

屏幕显示灰色框. 当你排版打印文档时自动用 $Proposition$ 及命题陈述的编号替换.

2. 输入命题的陈述, 如必要从文本切换到数学:

如果 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 且 $b^2 - 4ac > 0$, 则 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

你不必设置命题陈述为斜体, 程序会自动会设置.

3. 按Enter 结束段落.

4. 单击  结束命题陈述.

5.5.5 输入推论内容

1. 在列表特征中单击Corollary.

屏幕显示灰色框. 当你排版打印文档时自动用 $Corollary$ 及推论陈述的编号替换.

2. 输入推论的陈述, 如必要从文本切换到数学:

如果 $b^2 - 4ac < 0$, 则 x 不是实数.

与定理及命题相同, 程序自动初始化陈述.

3. 按Enter 结束段落.

4. 单击  结束推论陈述.

5.5.6 输入实例

1. 在列表特征中单击Example.

屏幕显示灰色框. 当你排版打印文档时自动用 $Example$ 及命题陈述的编号替换. 与所有定理类声明相同, 程序自动初始化陈述.

2. 输入实例的陈述:

如果 $x^2 - 4 = 0$, 则 $x = \pm 2$.

3. 按Enter 结束段落.

4. 单击  结束实例陈述.

§ 5.6 创建第4节

文章的最后一节包含定理及前几节的交叉参考. 同时说明几个数学对象的使用.

5.6.1 输入节标题

1. 在文本或体特征中选择Section.

2. 输入标题

矩阵与其他数学对象

3. 按Enter 结束标题.

5.6.2 输入首句并创建交叉参考

本节包含两个交叉参考. 当完成排版, 看上去像如下:

我们看到了如何在第3节中陈述定理1.

1. 输入

我们看到了如何在第3节中陈述定理1.

2. 输入定理的交叉参考:

a) 按space.

b) 在排版对象工具栏中单击 , 或从插入菜单中选择排版对象|交叉参考.

c) 在关键词框中输入

existence

d) 选择**确定**.

程序显示阴影框, 排版打印时自动用定理编号替换.

e) 按space.

3. 继续语句. 输入

本节

4. 输入交叉参考到第3节:

- a) 按space.
- b) 在排版对象工具栏中单击 ，或从插入菜单中选择排版对象|交叉参考.
- c) 在关键词框中输入
theorems
- d) 选择**确定**.

程序再次显示阴影框，排版打印时自动用节编号替换.

5. 输入必要的语句结束本句.

5.6.3 完成本节

1. 输入第2句:

你试着手写 $\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1$, 则 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

2. 按Enter 结束本节.

§ 5.7 创建参考文献

当你创建参考文献时，程序为列表自动创建标题及编号. 在样例文档中包含三个参考文献项. 第一个参考文献项使用关键词 *dunford* 以便第1节引用. 当你创建此参考文献项时，你必需输入关键词以便程序创建交叉参考.

5.7.1 创建第一个参考文献项

1. 在列表特征中选择Bibliography item.

程序显示一个包含 *bibitem* 阴影框并打开参考文献项特征对话框.

2. 在关键词框中输入

dunford

关键词显示在阴影框中.

3. 选择**确定**.

4. 输入第一个参考文献信息.

记住应用Italic文本特征到书的标题及应用Normal 特征关闭斜体.

N. Dunford and J. Schwartz, *Functional Analysis*, v. 2, Interscience Publishers, Inc., New York, 1964.

5. 按Enter 结束本段.

程序显示另一个包含bibitem阴影框并打开参考文献项特征对话框.

5.7.2 创建第二个参考文献项

你不引用本项的参考文献, 故不用指定关键词.

1. 选择取消.
2. 输入参考文献信息.

应用Italic文本特征到文章标题及应用Bold特征到卷号(26). 选择Normal 特征关闭斜体及粗体.

M. Struwe, *Semilinear wave equations*, Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1992), 53-85.

3. 按Enter 结束本段.

程序显示另一个参考文献项框并打开参考文献项特征对话框.

5.7.3 创建第三个参考文献项

你不引用本项的参考文献, 故无必指定关键词.

1. 选择取消.
2. 输入参考文献信息.

应用Italic文本特征到讲座的标题.

W.P. Thurston, *Geometry and topology of three manifolds*, Lecture notes, Princeton Univ., NJ, 1979.

3. 按Enter 结束本段.

程序显示另一个参考文献项对话框.

4. 选择取消关闭对话框.

5. 单击  结束参考文献项.

你完成了参考文献的设置.

§ 5.8 排版文档

你能在打印前预览排版文章的外观.

5.8.1 预览排版的文档

1. 在排版工具栏中单击 ，或从**排版**菜单中选择**预览**.

2. 在LaTeX 编译对话框中, 设置编译次数为3.

程序排版文章，通过后预览文章.

3. 用方向键、页面向上和向下键滚动文章浏览.

你的文档应该看起来像开始练习要求的样子. 注意尽管你没有输入格式化命令，程序使用模板具有的排版专门化格式化文档. 程序基于该模板的排版专门化有

- 居中对齐文档标题及节标题
- 将摘要设为引用
- 基于节标题创建目录表
- 页码
- 添加一个标题
- 用粗体陈述定理及类似的声明
- 用斜体陈述定理
- 创建脚注
- 对方程、节、参考文献创建正确的交叉参考的编号

注意你选择的模板，使用不同的排版专门化将使文档的打印外观大大不同. 例如，你选择DECUS Proceedings 模板，你输入的文档排版后将成为双栏格式.

4. 从预览程序的文件菜单中选择退出，返回文档窗口.

5.8.2 保存并打印文档

按下列步骤保存并打印你的文章:

1. 在标准工具栏中单击 ，或从**文件**菜单中选择**保存**.

2. 在排版工具栏中单击 ，或从**排版**菜单中选择**打印**.

3. 确信在打印对话框中正确设置打印机.
4. 选择**确定**.

第六章 共享你的成果

在网络或万维网上有不同的在线格式，方便在不同的平台或系统中共享你的文档。本练习演示如何输出文档为HTML 格式。如何排版为PDF文件以便Adobe Acrobat 预览。如何打包或解包文档到另外已安装相关程序的计算机中。

§ 6.1 输出文档为HTML格式

SWP, *SW*, 及 *SNB* 中的HTML 输出过滤器提供了快速创建你的文档为HTML 版本。可以用通用的浏览器浏览你的HTML格式的文档。

当你输出文档为HTML 文件时，程序的缺省设置将文档中的图形、数学表达式、数学绘图转换为PNG 格式。或者，你能输出数学为Mathematics Markup Language, 或MathML。缺省的输出设置适用于几乎所有文档，以下的练习就是这样做的（在线帮助包含其说明或用法）。

缺省时，过滤器创建Cascading Style Sheet (.css 文件) 以便描述文档窗口中文档的外观。HTML 过滤器不顾交叉参考及由排版自动产生的其他的文档元素。当你输出HTML 文件时使用超级链接在文档中跳转代替交叉参考。

1. 在指南的练习中打开已[创建的简单文档](#)。
2. 从文件菜单中选择**输出文档为**。
3. 选择文件保存的路径及输入HTML 文件名。
4. 在输出**类型列表**中选择你所要的文件格式。

Internet Explorer 5.5 或更高版支持本程序转换的MathML格式，Netscape 7/Firefox也已经支持MathML。

5. 选择**保存**。
6. 在浏览器中打开结果文件检查。

§ 6.2 创建排版的PDF文件

SWP及SW包含pdfLaTeX编译工具将文档排版为便携文档格式(PDF)文件—排版后的PDF文件具有LaTeX美观的特色. 转换后的PDF文件能用任何兼容的PDF浏览器（诸如Adobe Acrobat）浏览，以便你在更广泛的范围内分发文档.

排版后的PDF文件支持设备独立文件(DVI)不具备的特色. 特别地，如果文档中附加hyperref宏包, PDF的编译过程将文档中的超级链接转化为交叉参考. 如果排版专门化中要求目录表，则排版后的目录表会链接到文档的对应处.

PDF的编译过程使用缺省的设置将文档中的图形、数学绘图转换为适当的PDF格式. 缺省的设置能胜任任何文档，本文档使用此设置.（在线帮助包含改变PDF缺省设置的说明或用法）.

6.2.1 选择PDF输出

1. 从**排版**菜单中选择**输出选择**.
2. 选择PDF输出.
3. 选择**确定**.

6.2.2 排版为PDF文件

1. 打开已[创建的高级文档](#).
2. 如果你要浏览PDF文档，在排版工具栏中单击**排版预览PDF文档** ，或从排版菜单中选择**预览PDF文件**.
 - 如果程序找到你文档相关的PDF文件，PDF浏览器会浏览此文件.
 - 如果程序没有找到你文档相关的PDF文件，程序则会编译你的文档.

当编译完成后，程序打开PDF浏览器浏览PDF文件，排版打印也是如此.

仔细审查你的文档，注意任何必要的变化.

3. 如果你要打印PDF文档，在排版工具栏中单击**排版打印PDF文件** ，或在排版工具栏中选择**打印**.
4. 当你正确设置打印对话框中的参数后，选择**确定**.
 - 如果存在有效的PDF文件，程序通过编译立刻打印.
 - 如果不存在有效的PDF文件, 程序先编译后再打印.

§ 6.3 打包及解包文档

当你排版预览或排版打印文档时，程序编译文档会生成一系列的辅助文件。当你通过email或复制，将文档转移到另一计算机上，你必须确定所有相关的文件被正确处理。使用文档管理器打包你的文档—以便伴随主文档汇集文件在一起。你能解包文件到另一运行SWP, SW, 或SNB的计算机中或安装LaTeX系统的计算机中。

6.3.1 用文档管理器打包文档

1. 打开已[创建的高级文档](#)。
2. 从工具菜单中选择**文档管理**。
3. 在文件选择框中输入你的文档名或单击**浏览**选择打包的文档。
4. 选择**打包**。

文档管理器打开打包对话框，显示缺省的打包名称，并且会自动汇集全部相关的文件用于打包。

5. 如果你要改变打包的文件名，可单击**重命名**，选择**文档**活页夹，选择文件，再单击**重命名**，请输入所要的文件名。
6. 排除你不要打包文档的任何文件。

注意，当你分发文件给某个已安装SWP 或SW系统人时，你不需要包含排版专门化的文件。如果你分发文件给某个已安装SWP 或SNB系统人时，你不需要包含计算绘图的快照文件。

7. 选择**确定**。

程序创建一个包含你文档所需ASCII文件，扩展名为.rap, 其包含全部相关文件及使用ASCII编辑器重建原有文件的指令。

8. 当你操作完成后，选择**确定**。
9. 选择**结束**以退出文档管理器。

6.3.2 用文档管理器解包文档

1. 打开文档管理器。
2. 在文件选择框中输入你的文档名或单击**浏览**选择已打包的文档
3. 选择**解包**。

4. 在解包对话框中，选择要解包存放的目录.
5. 选择**确定**.
6. 在解包对话框中，作出任何改变你为文档及相关文件存放的缺省目录.
7. 选择**确定**.

程序解包文件，存放文档及相关文件到指定的目录中.

8. 当你操作完成后，选择**确定**.
9. 选择**结束**

6.3.3 用ASCII编辑器打开解包文档

1. 用ASCII编辑器打开解包文件.
2. 跟随的说明包含在被打开文件的开头部分.

第七章 在SWP中学习线性代数

线性代数（Linear Algebra）是代数学的一个分支，主要处理线性关系问题。解线性方程组的问题是最简单的线性问题。其理论工具主要是矩阵、向量与行列式等。

在SWP中，你能学习线性代数。在SWP中可解决线性代数几乎所有的计算问题。你可以试一试对已有的样例进行运算。

在你开始练习之前，请按下列步骤设置：

1. 打开新文档

如果指南隐藏在对话框后面，则在开始前需移到对话框进行相应处理。之后可在窗口间切换。

2. 定制文档窗口

> 定制文档窗口

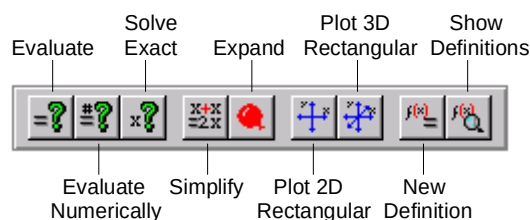
(1) 选择**视图**菜单，检验**隐藏**及**输入框**。

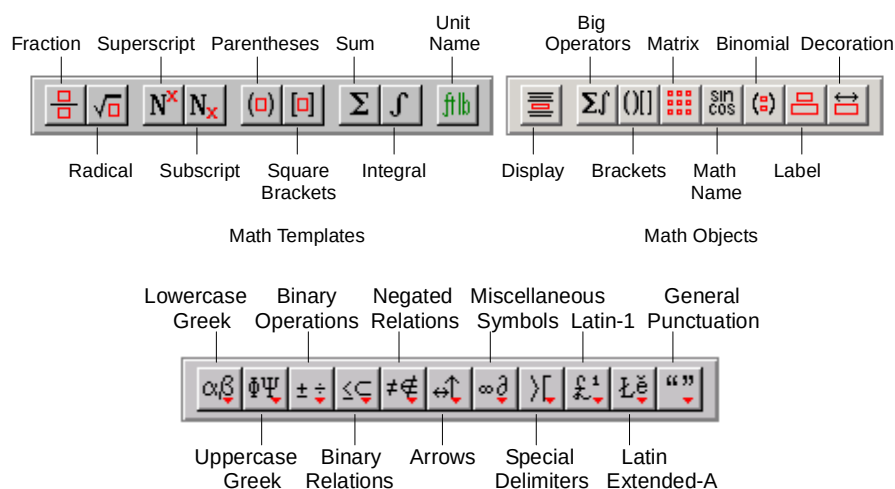
(2) 从**视图**菜单中选择**工具栏**。

(3) 检验Compute, Math Objects, Math Templates, and Symbol Panels toolbars（运算、数学对象、数学模板及符号面板）。

(4) 选择**关闭**。

此时程序窗口将显示如下工具栏：





3. 在练习前进入数学状态

> 开始设置数学状态

- 单击**数学/文本**按钮，以切换到 .
- 或者
- 使用键盘：**Ctrl+m** 或 **Ctrl+t** 或 **Insert**.
- 或者
- 从**插入**菜单中选择**数学**.

现在你可以输入数学表达式进行计算。如果你求助如何输入某个数学表达式，可以跳转到[输入数学](#)一章，看看是如何做到的。确信你输入的数学表达式是以红色显示的。

§ 7.1 线性方程组

含有未知量的等式称为方程。所谓线性方程是指未知量的次数都是一次的，线性方程组就是有限个线性方程的群组。中学数学中用消元法解线性方程组。从理论上讲，线性方程组的解属三种情况之一：无解、有唯一解及有无穷多个解。对线性方程组消元实质就是对线性方程组进行若干次行变换，Gauss消元法就是线性方程组的行变换再加上回代的求解过程。

7.1.1 解线性方程组（方程个数等于未知量个数）

1. 输入一系列多行的线性方程组。
2. 将插入点定位线性方程，选择**运算**菜单中的**解方程|精确解**。

如果线性方程组方程的个数等于未知量的个数，且方程是相互独立的、不矛盾的，则系统自动找到线性方程组已有的未知量并给出方程组的解。如果有方程是矛盾的，则给出“无解”（No solution found）。

► 解方程+ 精确解

$$\text{例1. } \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 2y - 3z = -1 \end{cases}, \text{解是: } \left[x = \frac{17}{8}, y = \frac{11}{8}, z = \frac{5}{4} \right].$$

$$\text{例2. } \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}, \text{无解.}$$

7.1.2 解线性方程组（方程个数大于未知量个数）

1. 输入一系列多行的线性方程组。
2. 将插入点定位线性方程，选择运算菜单中的解方程|精确解。
3. 当出现求解的变量对话框时，输入用逗号间隔的全部未知量，选择确定。

► 解方程+ 精确解（输入 x, y, z ）

$$\text{例3. } \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 2y - 3z = -1 \\ x + y = \frac{7}{2} \end{cases}, \text{解是: } \left[x = \frac{17}{8}, y = \frac{11}{8}, z = \frac{5}{4} \right].$$

7.1.3 解线性方程组（方程个数小于未知量个数）

1. 输入一系列多行的线性方程组。
2. 将插入点定位线性方程，选择运算菜单中的解方程|精确解。
3. 当出现求解的变量对话框时，输入用逗号间隔的未知量，未输入的未知量是自由未知量，选择确定。

► 解方程+ 精确解（输入 x, y 或 x, z ）

$$\text{例4. } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3z = 4 \end{cases}, \text{解是: } [x = 4 - 3z, y = 7 - 6z].$$

$$\text{例5. } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3z = 4 \end{cases}, \text{解是: } \left[x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}, z = \frac{7}{6} - \frac{1}{6}y \right].$$

7.1.4 初等变换与Gauss消元法

对线性方程组消元实质上是对线性方程组作初等行变换, 转化为同解的阶梯形线性方程组. 线性方程组的初等变换:

1. 用一个非零数乘方程组中的某一个方程: $\mathbb{I} \times k, \quad kr_i;$
2. 交换方程组中的某两个方程: $\mathbb{I} \longleftrightarrow \mathbb{J}, \quad r_i \longleftrightarrow r_j;$
3. 把方程组中的一个方程的某个倍数加到另一个方程上: $\mathbb{I} \times k + \mathbb{J}, \quad kr_i + r_j.$

例6. (《线性代数》P.6, 1(1))
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{cases}, \text{解是: } [x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1].$$

> Gauss消元法

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & \text{①} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \text{②} \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 & \text{③} \end{cases} \xrightarrow{\text{②} \times (-1) + \text{①}, \text{③} \times (-3) + \text{②}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & \text{①} \\ -x_2 + 2x_3 = 1 & \text{④} \\ -x_2 + 4x_3 = 3 & \text{⑤} \end{cases} \\ & \xrightarrow{\text{④} \times (-1) + \text{⑤}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & \text{①} \\ -x_2 + 2x_3 = 1 & \text{④} \\ 2x_3 = 2 & \text{⑥} \end{cases} \xrightarrow{\text{⑥} \times (\frac{1}{2}), \text{④} \times (-1)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & \text{①} \\ x_2 - 2x_3 = -1 & \text{⑧} \\ x_3 = 1 & \text{⑦} \end{cases} \\ & \xrightarrow{\text{⑦代入⑧, ⑦代入⑥}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 & \text{⑩} \\ x_2 = 1 & \text{⑨} \\ x_3 = 1 & \text{⑦} \end{cases} \xrightarrow{\text{⑨代入⑩}} \begin{cases} x_1 = -1 & \text{⑪} \\ x_2 = 1 & \text{⑨} \\ x_3 = 1 & \text{⑦} \end{cases}. \end{aligned}$$

说明: 在SWP中, 可以用下面的矩阵运算来进行方程的行变换.

$$a(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1) + b(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2)$$

$$= a(x_1a_{11} + x_2a_{12} + x_3a_{13}) + b(x_1a_{21} + x_2a_{22} + x_3a_{23}) = ab_1 + bb_2$$

如 $\text{①} \times (-1) + \text{②}$:

$$-(x_1 + 2x_2 - x_3 = 0) + (x_1 + x_2 + x_3 = 1) = 2x_3 - x_2 = 1$$

如 $\text{①} \times (-3) + \text{③}$:

$$-3(x_1 + 2x_2 - x_3 = 0) + (3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3) = 4x_3 - x_2 = 3$$

> 初等行变换

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow{-r_1 + r_2, -3r_1 + r_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow{-r_2 + r_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \\ & \xrightarrow{-r_2, \frac{1}{2}r_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_3 = 2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 1 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \\ & \xrightarrow{-2r_2 + r_1} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

说明：在SWP中，可以用下面的**矩阵行变换**来对方程进行行变换。

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{array} \rightarrow J\left(\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 - x_2 = 1 \\ 2x_3 = 2 \end{array}, 1, 2, -1 \right) \rightarrow J\left(\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 - x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array}, 1, 3, -3 \right) \rightarrow J\left(\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 - x_2 = 1 \\ 4x_3 - x_2 = 3 \end{array}, 2, 3, -1 \right) \\
 \rightarrow K\left(\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 - x_2 = 1 \\ 2x_3 = 2 \end{array}, 3, \frac{1}{2} \right) \rightarrow J\left(\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 - x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array}, 3, 1, 1 \right) \rightarrow J\left(\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_3 - x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array}, 3, 2, -2 \right) \\
 \rightarrow K\left(\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{array}, 2, -1 \right) \rightarrow J\left(\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array}, 2, 1, -2 \right) = \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array}; \\
 S\left(\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{array}, 2, 3 \right) = \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array}.
 \end{array}$$

§ 7.2 矩阵

数学表达的矩形阵列叫做**矩阵(matrix)**，是十九世纪英国数学家凯利首先提出来研究的，1850年英国西尔维斯特(James Joseph Sylvester)首先使用矩阵一词。

7.2.1 矩阵的定义

选择**视图**菜单中的**帮助行及输入框**，有助于输入焦点的定位。缺省状态是显示的，方便操作。但在预览或打印时并不显示。

通常用括号来限定矩阵，既可内置定界符也可手工输入括号。两种方式即使提供相同的屏幕外观及属性，但排版时稍有区别，内置定界符与矩阵内容更为紧密些。

> 用圆括号或方括号限定矩阵

1. 用鼠标选择矩阵或插入点定位在矩阵的左侧（或右侧），按shift + right arrow (或left arrow)。
2. 单击  或 .

或者

1. 用插入点定位于矩阵，点击并**拖拉**。
2. 单击 ，或选择**编辑|特性**，增加所要的定界符。

所选择的圆括号或方括号或花括号并不影响矩阵的数学性质。竖线的括号专指特殊的数学运算（单竖线指数学中的行列式，双竖线指范数，在矩阵表示时应该避免使用）。

你能使用键盘中的方向键或tab键在矩阵中移动，也可使用鼠标。按空格键也能移动位置或离开矩阵。

你能用四种方式创建矩阵：使用矩阵对话框；使用键盘快捷键；选择**运算**中的子菜单项**矩阵**；选择**随机矩阵**或**填充矩阵**。

> 利用矩阵对话框创建矩阵

1. 在数学对象工具栏中单击 ，或选择**插入|矩阵**。
2. 选择行数及列数。
3. 在内置定界符下，选择**没有**或任一种可用的内置定界符。
4. 选择**确定**。
5. 在**输入框**中输入矩阵元素。

矩阵元素可以是任何有效的数学表达式. 实数或复数，同样的代数表达式。

> 从矩阵获取元素

1. 将矩阵定义为某个变量。
2. 再输入该变量，下标为 i, j ，行数 i 与列数 j 应在可能的范围内。
3. 选择**计算**。

► 定义+ 新定义

$$\text{例1. } A = \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{bmatrix}$$

► 计算

$$A_{2,3} = 50$$

$$A_{3,3} = 49$$

注意矩阵变量的下标是用逗号分隔的。

你也能通过函数 $\text{row}(A, i)$ 及 $\text{col}(A, j)$ 来找出 $m \times n$ 矩阵 A 的某一行或某一列. 如果自动替换开启，在数学模式下输入这两个函数，函数名会变为灰色. 否则, 你可以选择**插入|数学名称**对话框。

> 计算矩阵的行或列

1. 在数学模式下，输入函数名 row 或 col . (自动会变为灰色.)
2. 第 i 行：计算 $\text{row}(A, i)$. 第 j 列：计算 $\text{col}(A, j)$.

► 计算

例2.

$$\begin{aligned} \text{row} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 1 \right) &= [1 \quad 2] \\ \text{row} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 2 \right) &= [4 \quad 3] \\ \text{col} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 1 \right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \text{col} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 2 \right) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.2.2 矩阵的运算

矩阵的运算包括：加法、减法、数乘矩阵、矩阵的乘法，同时还要研究矩阵的转置及可逆矩阵.

矩阵的加法与减法

1. 在数学模式下，输入两个矩阵的和或差.
2. 定位插入点于表达式，选择**计算**.

► 计算

例3.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

注意相同类型的矩阵方能求和或作差. 加法满足： $A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$.

数乘矩阵

1. 输入含数乘矩阵的表达式.
2. 定位插入点于表达式，选择**计算**.

► 计算

例4.

$$-7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -14 \\ -28 & -21 \end{bmatrix}$$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-5b & 2a-6b \\ 4a-8b & 3a-7b \end{pmatrix}$$

线性运算满足: $k(lA) = (kl)A$; $(k+l)A = kA + lA$; $k(A+B) = kA + kB$.

矩阵的转置

$m \times n$ 矩阵的转置是 $n \times m$ 矩阵, 行与列互换. 满足: $(A^T)^T = A$; $(A+B)^T = A^T + B^T$; $(AB)^T = B^T A^T$; $(kA)^T = kA^T$.

> 计算矩阵的转置

1. 定位插入点于矩阵.
2. 选择运算|矩阵|转置.

► 矩阵+ 转置

例5. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 转置: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

可以使用转置的专门符号, 将矩阵右上标设为 T .

► 计算

例6.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$$

最后一例实际上是后续内容向量的内积.

矩阵的乘法

$1 \times n$ 矩阵与 $n \times 1$ 矩阵的乘积是一个数, 也称为向量的内积或点积.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

$m \times k$ 矩阵 A 与 $k \times n$ 矩阵 B 的乘积是 $m \times n$ 矩阵 C ，矩阵 C 的第 i 行第 j 列处的元素 c_{ij} 是通过矩阵 A 的第 i 行向量与矩阵 B 的第 j 列向量内积得到的。

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \text{其中} \quad c_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)$$

> 矩阵的乘法

1. 输入矩阵相乘的表达式.
2. 定位插入点于表达式，选择**计算**.

► 计算

例7.

$$\begin{aligned} (a \quad b) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= ac + bd \\ \begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac + bd \\ cu + dv \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 21 & 20 \\ 44 & 45 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 8 & -6 & -8 \\ -7 & -9 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 9 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -80 & 34 \\ -128 & -88 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

满足: $(AB)C = A(BC)$; $A(B + C) = AB + AC$; $(A + B)C = AC + BC$; $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

相同的**方阵**可以连续相乘，表示成矩阵的指数幂的形式.

输入矩阵并插入点定位于左侧，选择  或插入|上标，在输入框中输入指数.

> 矩阵的正整数幂

1. 输入矩阵指数幂的表达式.
2. 定位插入点于表达式，选择**计算**.

► 计算

例8. (《线性代数》P.19, 1(5))

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 &= \begin{pmatrix} -10 & 33 \\ -11 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.2.3 单位矩阵与逆矩阵

对于 $m \times n$ 矩阵, 当 $m = n$ 时, 称为 n 阶矩阵(方阵), 如果其主对角线上的元素均为1, 其他元素均为0, 则称此矩阵为 n 阶单位矩阵. 例如3阶单位矩阵:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

> 创建 n 阶单位矩阵

- 选择**运算|矩阵|填充矩阵**, 再选择**填充类型**为identity, 设置行数与列数相同的 n 的值, 选择**确定**.

n 阶矩阵 A 的逆矩阵是 n 阶矩阵 B , 满足 $AB = BA = E$, 记为 $B = A^{-1}$. 例如:

例9. ► 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

满足: $(A^{-1})^{-1} = A$; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; $k \neq 0, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

矩阵的多项式

可以计算以方阵为变量的多项式. 此时, $A^0 = E$ (其中 E 是与 A 同阶的单位矩阵).

> 计算方阵的多项式

1. 选择**运算|定义|新定义**, 定义矩阵为变量.
2. 计算以矩阵为变量的多项式.

► 定义+ 新定义

例10.

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

► 计算

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$x^2 - 5x - 2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^2 - 5x - 2x^0 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

你也可以定义多项式函数, 再计算以方阵为元的多项式.

> 计算方阵的多项式函数

1. 定义多项式 $f(x)$ ，其中以 x^0 代替常数.
2. 计算以 x 为变量的多项式函数的值.

► 定义+ 新定义

例11.

$$f(x) = x^2 - 5x - 2x^0$$

► 计算

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

表达式 $-5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 2$ 严格意义上是不正确的，在SWP中执行计算时，将2作为 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 来替换进行计算，以便得到正确结果.

► 计算

例12.

$$-5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 2 = \begin{bmatrix} -7 & -10 \\ -20 & -17 \end{bmatrix}$$

7.2.4 线性方程组的矩阵解法

一般的线性方程组以未知量的线性运算来表达，可以将线性方程组转化为矩阵方程的形式，求解特殊的矩阵方程.

> 线性方程组转换到矩阵

1. 插入点定位于[线性方程组](#)，以创建矩阵（增广矩阵）.
2. 选择运算|重写|方程作为矩阵形式.
3. 在对话框中输入以逗号分隔的未知量.
4. 选择确定.

► 重写+ 方程作为矩阵形式(未知量列表: x, y 或 x, y, z)

例13.

$$\{x + 2y = 3, 3x - 5y = 0\}, \text{ 对应矩阵: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x + y - 2z = 1 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 2y - 3z = -1 \end{matrix}, \text{ 对应矩阵: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

线性表达式将被解释为方程，自动设置表达式等于0. 例如：

► 重写+ 方程作为矩阵形式(未知量列表: x, y 或 x, y, z)

例14.

$$\{x + 2y - 3, 3x - 5y\}, \text{ 对应矩阵: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + y - 2z - 1 \\ 2x - 4y + z \\ 2y - 3z + 1 \end{pmatrix}, \text{ 对应矩阵: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

注意：在将线性方程组转换到矩阵形式时，方程组的左右括号要匹配才能转换.

> 线性方程的矩阵解法

- 插入点定位于方程处，单击  或选择运算|解方程|精确解.

► 解方程+ 精确解

例15.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 解是: } \begin{pmatrix} \frac{17}{8} \\ \frac{11}{8} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ 解是: } \begin{pmatrix} 4 - 3\hat{t}_3 \\ 7 - 6\hat{t}_3 \\ \hat{t}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ 解是: } \begin{pmatrix} 4 - \hat{t}_4 - 3\hat{t}_3 \\ 7 - \hat{t}_4 - 6\hat{t}_3 \\ \hat{t}_3 \\ \hat{t}_4 \end{pmatrix}$$

在首个实例中，系数矩阵是**可逆的**，可以先求系数矩阵的逆矩阵，再左乘常数向量：

► 计算

例16.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{8} \\ \frac{11}{8} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

7.2.5 矩阵的初等行变换

矩阵的初等变换既有行变换也有列变换. 矩阵的初等行变换有三种:

1. 倍乘变换: 用一个非零数乘矩阵中的某一行: kr_i ;
2. 对换变换: 交换矩阵中的某两行: $r_i \longleftrightarrow r_j$;
3. 倍加变换: 把矩阵中的一行的某个倍数加到另一行上: $kr_i + r_j$.

> 使用MuPAD函数multRow(x,i,k)进行倍乘变换

1. 选择运算|解方程|定义MuPAD函数.

2. 对话框中设置如下:

- MuPAD 函数名: linalg::multRow(x,i,k)
- Scientific WorkPlace 名称: $K(x,i,k)$
- MuPAD 函数名中输入的是MuPAD过程名称, 再检验MuPAD内置函数或自动装载.

3. 选择确定.

此过程定义了函数 $K(x,i,k)$, 其中矩阵为 x , 第 i 行乘常数 k .

Example 1 (17.) 如上定义函数 $K(x,i,k)$. 给定矩阵变量名为 x , 第1行乘 $\frac{1}{5}$:

► 定义+ 新定义

$$x = \begin{pmatrix} -85 & -55 & 40 \\ 97 & 50 & 79 \\ 49 & 63 & 57 \end{pmatrix}$$

► 计算

$$K(x, 1, \frac{1}{5}) = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 8 \\ 97 & 50 & 79 \\ 49 & 63 & 57 \end{pmatrix}$$

> 使用MuPAD函数swapRow进行对换变换

1. 选择运算|解方程|定义MuPAD函数.

2. 对话框中设置如下:

- MuPAD 函数名: linalg::swapRow(x,i,j)

- **Scientific WorkPlace** 名称: $S(x, i, j)$
- **MuPAD** 函数名中输入的是MuPAD过程名称, 再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.

3. 选择**确定**.

此过程定义了函数 $S(x, i, j)$, 其中矩阵为 x , 交换第 i 行与第 j 行.

Example 2 (18.) 如上定义函数 $S(x, i, j)$. 给定矩阵变量名为 x , 交换第1行与第2行:

► 定义+ 新定义

$$x = \begin{pmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \end{pmatrix}$$

► 计算

$$S(x, 1, 2) = \begin{pmatrix} 97 & 50 & 79 & 56 \\ -85 & -55 & -37 & -35 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \end{pmatrix}$$

> 使用**MuPAD**函数 $\text{addRow}(x, i, j, k)$ 进行倍加变换1. 选择**运算|解方程|定义MuPAD函数**.

2. 对话框中设置如下:

- **MuPAD** 函数名: $\text{linalg}::\text{addRow}(x, i, j, k)$
- **Scientific WorkPlace** 名称: $J(x, i, j, k)$
- **MuPAD** 函数名中输入的是MuPAD过程名称, 再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.

3. 选择**确定**.

此过程定义了函数 $J(x, i, j, k)$, 其中矩阵为 x , 第 i 行乘常数 k 加到第 j 行上.

Example 3 (19.) 如上定义函数 $K(x, i, j, k)$. 给定矩阵变量名为 x , 第1行乘-3加到第2行上:

► 定义+ 新定义

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

► 计算

$$J(x, 1, 2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

> Guass消元法及行阶梯形矩阵

- 线性方程组的Guass消元法，应用于对应的增广矩阵上，可选择**运算|矩阵**下的子菜单项：**分数自由高斯消元法**（Fraction-Free Gaussian Elimination）、**高斯消元法**（Gaussian Elimination）、**行最简阶梯形矩阵**（Reduced Row Echelon Form）。

可以从上面三种操作得到行阶梯形矩阵，例如：

► 矩阵+ 分数自由高斯消元法

例20.

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}, \text{分数自由高斯消元法: } \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & -44 & 58 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{分数自由高斯消元法: } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -cb + ad \end{pmatrix}.$$

► 矩阵+ 高斯消元法

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}, \text{高斯消元法: } \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{29}{4} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{高斯消元法: } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a}(ad - bc) \end{pmatrix}.$$

► 矩阵+ 行最简阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{31}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{29}{22} \end{pmatrix}.$$

> 矩阵转换到线性方程组

- 当使用上述方法得到行最简阶梯形矩阵后，可将矩阵改写为对应的同解线性方程组。

1. 插入点定位于矩阵。
2. 选择**运算|重写|矩阵作为形式**。
3. 在对话框中输入以逗号分隔的未知量，选择**确定**。

► 重写+ 矩阵作为方程形式(变量列表: x_1, x_2, x_3 or x_1, x_2)。

例21.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{对应方程: } \left\{ x_2 - \frac{5}{6}x_3 = \frac{1}{3}, x_1 - \frac{7}{6}x_3 = \frac{2}{3}, 0 = 0 \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{31}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{29}{22} \end{pmatrix}, \text{对应方程: } \left\{ x_2 = -\frac{29}{22}, x_1 = \frac{31}{44} \right\}.$$

上面的线性方程组的形式写在了同一行上, 可以选择**矩阵|重组**改写成一系列多行的形式.

► 矩阵+ 重组

例22.

$$\left\{ x_2 - \frac{5}{6}x_3 = \frac{1}{3}, x_1 - \frac{7}{6}x_3 = \frac{2}{3}, 0 = 0 \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x_2 - \frac{5}{6}x_3 = \frac{1}{3} \\ x_1 - \frac{7}{6}x_3 = \frac{2}{3} \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ x_2 = -\frac{29}{22}, x_1 = \frac{31}{44} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x_2 = -\frac{29}{22} \\ x_1 = \frac{31}{44} \end{array} \right\}$$

例23. (《线性代数》P.20, 11(2))

$$\text{对增广型矩阵进行初等行变换解线性方程组: } \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}.$$

解: 展示中间过程

$$\begin{pmatrix} -2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{pmatrix}, \text{对应矩阵: } \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \text{对应方程: } \left\{ x_2 = 0, x_1 = -\frac{1}{5}, x_3 = -\frac{3}{5} \right\},$$

$$\left\{ x_2 = 0, x_1 = -\frac{1}{5}, x_3 = -\frac{3}{5} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 = -\frac{1}{5} \\ x_3 = -\frac{3}{5} \end{array} \right\}.$$

或手工详细计算:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2r_2 + r_1, \\ -2r_2 + r_3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_1 + r_2, \\ \frac{1}{5}r_3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & \frac{12}{5} \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}r_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-3r_1 + r_2, \\ r_1 + r_3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2, \\ r_2 \leftrightarrow r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \text{原方程的解为 } \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\frac{3}{5} \end{cases}.$$

§ 7.3 矩阵的进一步研究

对 n 阶单位矩阵进行三种初等变换得到对应的初等矩阵. 用初等矩阵左乘行变换（或右乘列变换），建立矩阵初等变换下矩阵的等量关系. 通过将矩阵行变换为行阶梯形矩阵求矩阵的秩，从而判别矩阵是否可逆. 当矩阵可逆时，与同阶单位矩阵配对并进行初等行变换，最后求出其逆矩阵.

7.3.1 分块矩阵

矩阵是一个表格，大表格可以分成小表格，小表格合起来就成为一个大表格，对于这样的分、合，要求折开的线、合起来的边线都是上下、左右对齐的.

> 使用**MuPAD**函数**submatrix**得到分块矩阵的子矩阵

1. 选择**运算|解方程|定义MuPAD函数**.

2. 对话框中设置如下：

- **MuPAD 函数名**: `linalg::submatrix(x,i..m,j..n)`
- **Scientific WorkPlace 名称**: $M(x,i..m,j..n)$
- **MuPAD 函数名**中输入的是MuPAD过程名称，再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.

3. 选择**确定**.

此过程定义了函数 $M(x,i..m,j..n)$,其中矩阵为 x , $i..m$ 应取 x 中的行列表, $j..n$ 应取 x 中的列列表.

Example 4 (1.) 如上定义函数 $M(x,i..m,j..n)$. 给定矩阵变量名为 x , 获取若干行、若干列的某个子矩阵:

► 定义+ 新定义

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

► 计算

$$M(x, [1, 2, 3], [1, 2]) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M(x, [1, 2, 3], [3, 4, 5]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(x, [4], [1, 2]) = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M(x, [4], [3, 4, 5]) = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

> **矩阵的并列及堆积** 同行数的两个矩阵可以左右合并成一个矩阵，同列数的两个矩阵可以上下堆积成一个矩阵。

► 定义+ 新定义

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = (7 \ 8)$$

$$F = (9 \ 10 \ 0)$$

► 计算

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix} = \text{blockmatrix} \left(2, 2, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right], [(7 \ 8), (9 \ 10 \ 0)] \right)$$

只说明是分块矩阵，没有显示预期的 4×5 矩阵。

► 矩阵+ 合并

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{合并: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(7 \ 8) (9 \ 10 \ 0), \text{合并: } (7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 0)$$

► 矩阵+ 堆积

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 0), \text{堆积: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

> **分块矩阵的运算**

与矩阵一样，分块矩阵也有加法、减法、数乘矩阵、转置及逆矩阵，但在SWP中还无法直接实现。

► 定义+ 新定义

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

► 计算

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = \text{blockmatrix} \left(2, 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{blockmatrix} \left(2, 2, \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right], [(7 \ 8), (9 \ 10 \ 0)] \right)$$

没有得到预期的矩阵相乘的结果，只能每个元素单独计算了。

► 计算

$$\begin{aligned}
 BG + CH &= \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 23 \end{pmatrix} \\
 DG + FH &= 109 \\
 \text{故} \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 23 \\ 109 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

> 使用**MuPAD**函数**substitute**替换分块矩阵中的子矩阵进行分块矩阵的运算

1. 选择运算|解方程|定义**MuPAD**函数.

2. 对话框中设置如下:

- **MuPAD** 函数名: `linalg::substitute(x,y,i,j)`
- **Scientific WorkPlace** 名称: $I(x,y,i,j)$
- **MuPAD** 函数名中输入的是**MuPAD**过程名称, 再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.

3. 选择**确定**.

此过程定义了函数 $I(x,y,i,j)$,其中用矩阵 y 替换矩阵 x 中第 i 行、第 j 列开始的子矩阵.

Example 5 (2.) 如上定义函数 $I(x,y,i,j)$. 给定矩阵 $BG + CH$ 替换矩阵 P 中第1行、第1列开始的子矩阵, 给定矩阵 $DG + FH$ 替换矩阵 $I(P, BG + CH, 1, 1)$ 中第4行、第1列开始的子矩阵:

► 定义+ 新定义

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\
 C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 D &= \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$F = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

► 矩阵+ 填充矩阵+ zero, 并定义

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

► 计算

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} =$$

$$I(I(P, BG + CH, 1, 1), DG + FH, 4, 1) = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 23 \\ 109 \end{pmatrix}$$

7.3.2 矩阵的初等变换

> 初等矩阵

1. 选择矩阵|填充矩阵.

2. 在对话框中作出适当选择创建单位矩阵.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 对单位矩阵进行三种初等行变换之一得到对应的初等矩阵.

$$J(E, 3, 1, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S(E, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K(E, 2, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

> 对矩阵进行初等行变换

1. 创建需要行变换的矩阵.

2. 在所需行变换的矩阵上左乘所需行变换的对应的初等矩阵.

3. 选择计算.

以下实例加以说明.

Example 6 (3.) 第3行乘上 λ 加到第1行上.

► 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 4\lambda - 2 & \lambda - 1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Example 7 (4.) 交换第2行与第3行.

► 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -50 & -12 & -18 \\ 31 & -26 & -62 \\ 1 & -47 & -91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 & -12 & -18 \\ 1 & -47 & -91 \\ 31 & -26 & -62 \end{pmatrix}$$

Example 8 (5.) 第2行乘 λ .

► 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 & -2 & -18 \\ 33 & -26 & 82 \\ 14 & -47 & -91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & -2 & -18 \\ 33\lambda & -26\lambda & 82\lambda \\ 14 & -47 & -91 \end{pmatrix}$$

7.3.3 矩阵的秩

如果一个矩阵通过初等变换为另一个矩阵, 则这两个矩阵是等价的. 反之亦然. 任意矩阵 A 必定等价于一个分块矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 当 $r = 0$ 时, $E_r = O$; 当 $r > 0$ 时, E_r 是 r 阶单位矩阵, 称 r 为矩阵 A 的秩, 记为 $\text{rank}(A)$ 或 $r(A)$.

> 求矩阵的秩

1. 插入点定位于矩阵.
2. 选择选择运算|矩阵|秩 (选或择运算|矩阵|行最简阶梯形矩阵).

► 矩阵+ 秩

例6.

$$\begin{pmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -16 & -3 \\ 8 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \text{秩: } 2$$

► 矩阵+ 行最简阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -16 & -3 \\ 8 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{121}{5} & \frac{26}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{秩: } 2$$

> 线性方程组有解的充要条件

n 元线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵为 A , 常数向量为 b , 增广矩阵为 $(A|b)$.

1. n 元线性方程组 $Ax = b$ 有解的充要条件: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$.

2. n 元线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解的充要条件： $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = n$.

3. n 元线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充要条件： $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) < n$.

4. n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充要条件： $\text{rank}(A) < n$.

这样，可简接求线性方程组的增广矩阵的秩与系数矩阵的秩，再进行判断原线性方程组解的情形，

例7.判断方程是否有解：

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5 \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \end{cases}.$$

解：

$$\begin{pmatrix} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5 \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \end{pmatrix}, \text{对应矩阵: } \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{秩: } 2;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -9 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \text{秩: } 2, \text{由于增广矩阵的秩与系数矩阵的秩相同，则原线性方程组有唯一解.}$$

7.3.4 逆矩阵的求法

> 求可逆矩阵的逆矩阵

- 插入点定位于矩阵，选择**运算|矩阵|逆矩阵**.

或

- 将矩阵右上标设为 -1 ，选择**计算**.

或

- 插入点定位于矩阵（所求矩阵与同阶单位矩阵组成新矩阵），选择**运算|矩阵|行最简阶梯形矩阵**.

► 矩阵+ 求逆

例8.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \text{逆矩阵: } \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

► 计算

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

► 矩阵+ 行最简阶梯形矩阵

例9.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ 0 & 1 & \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

检验所求逆矩阵是否正确, 可以检验是否满足逆矩阵的乘法定义.

► 计算

例10.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于 $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, 你可以计算负整数次幂的矩阵.

> 计算可逆矩阵的负整数幂

1. 输入所需表达式.
2. 插入点定位于表达式, 选择**计算**.

► 计算

例11.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{-3} = \begin{pmatrix} -\frac{1255}{2197} & \frac{942}{2197} \\ \frac{1256}{2197} & -\frac{941}{2197} \end{pmatrix}$$

如下展示如何利用公式求 $A^{-3} = (A^3)^{-1}$ 负整数次幂矩阵.

► 计算

例12.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 941 & 942 \\ 1256 & 1255 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 941 & 942 \\ 1256 & 1255 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1255}{2197} & \frac{942}{2197} \\ \frac{1256}{2197} & -\frac{941}{2197} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.3.5 矩阵方程

设 P, Q 为矩阵, 且存在 X 满足矩阵方程 $PX = Q$, 如何求 X ? 当 Q 是列向量时, 可以用线性方程的矩阵方法求解. 同样行变换的方法可移植到此类矩阵方程的解法上.

例13. (《线性代数》P.79, 17) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,
 $(4A - 2B)X = C$, 求 X .

1. 输入如下矩阵并定义:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

2. 输入如下方程并求解:

$$(4A - 2B)X = C, \text{ 解是: } \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

或另外方法1:

$$1. \text{ 计算: } (4A - 2B) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 12 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2. \text{ 求逆矩阵: } \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 12 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \text{ 逆矩阵: } \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$3. \text{ 计算: } \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

或另外方法2:

$$1. \text{ 合并矩阵: } (4A - 2B)C, \text{ 合并: } \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 12 & -2 & 6 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$2. \text{ 化为行最简阶梯形矩阵: } \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 12 & -2 & 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$3. \text{ 所求矩阵: } X = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

§ 7.4 向量组与解空间

齐次线性方程组是否有非零解，可以用其系数矩阵的列向量是否线性相关来判断。齐次线性方程组的解集形成向量空间。中学数学学习过2维平面向量 $a = (a_1, a_2)$ ，3维空间向量 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 。现在进一步学习 n 维向量 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

7.4.1 向量的概念

可以用如下任何一种方法表示向量。

- n 维向量: $(2, -1, 0)$, (x_1, x_2, x_3) , $[3, 2, 1]$, $[x_1, x_2, x_3]$
- $1 \times n$ 矩阵: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 & 17 & -8 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$
- $n \times 1$ 矩阵: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 35 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

上述方式轻松方便，以前的输入或输出可用于向量的运算。

> 以矩阵形式构作向量

1. 单击  或选择插入|矩阵。
 2. 设置行数（或列数）为1及向量的维数。
 3. 在输入框中输入元素。
1. 用鼠标选择向量并单击括号按钮以限定向量。

> 以列表形式构作向量

1. 单击括号按钮  或  ; 或单击按钮模板  , 选择相应的括号; 或按ctrl + 9.
2. 插入点定位于括号中，输入用逗号分隔的元素。

> 使用MuPAD函数col扩展版得到矩阵列向量（组）

1. 选择运算|解方程|定义MuPAD函数。
2. 对话框中设置如下：

- MuPAD 函数名: `linalg::col(x,i..j)`

- **Scientific WorkPlace** 名称: $C(x, i..j)$
- **MuPAD** 函数名中输入的是MuPAD过程名称, 再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.

3. 选择确定.

此过程定义了函数 $C(x, i..j)$, 其中矩阵为 $x, i..j$ 为矩阵某些列的列表.

Example 9 (1.) 如上定义函数 $C(x, i..j)$. 给定矩阵变量名为 x , 分别获取矩阵中第2列, 第1,2列, 第1,3,2列向量(组):

► 定义+ 新定义

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

► 计算

$$C(x, 2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$C(x, [1, 2]) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right]$$

$$C(x, [1, 3, 2]) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right]$$

7.4.2 向量的和与数乘向量

向量 $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 与 $[y_1, y_2, \dots, y_n]$ 的和定义为

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, y_2, \dots, y_n] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]$$

数 a 乘向量 $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 定义为

$$a [x_1, x_2, \dots, x_n] = [ax_1, ax_2, \dots, ax_n]$$

这与矩阵的行向量之和及数乘行向量是一致的.

> 计算向量的和

- 在数学模式下输入同维的向量的运算表达式, 并选择**计算**.

► 计算

例2.

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = [x_1 + y_1 \quad x_2 + y_2 \quad x_3 + y_3]$$

$$(2, -1, 0) + (2, 3, -5) = [4 \quad 2 \quad -5]$$

$$[1, 2, 3, 4, 3] - [3, -5, 1, 6, 0] = [-2 \quad 7.1 \quad -3 \quad 4.3]$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w + x & y + z \end{bmatrix}$$

> 计算数乘向量

- 在数学模式下输入数乘向量的运算表达式，并选择**计算**。

► 计算

例3.

$$a [x_1 \quad x_2 \quad x_3] = [ax_1 \quad ax_2 \quad ax_3]$$

$$6 [2 \quad 3 \quad -5] = [12 \quad 18 \quad -30]$$

7.4.3 向量组的线性表示及线性相关与无关

同维向量的加法、减法及数乘，统称为向量的线性运算。同维向量的线性运算的结果仍为同维的向量。此时结果向量可以用这些运算的向量线性表示，或表示为线性组合。于是线性方程组是否有解可以表述为常数向量是否可以表示为以系数矩阵为列向量的线性组合。

> 线性表示

例3.

- 输入如下4个向量并加以定义：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix},$$

- 输入如下等式：

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta,$$

- 选择整个等式并单击**计算**：

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$$

4. 改写成如下的线性方程组并求解:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = -12 \end{cases}, \text{解是: } \left[x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{3}{2} \right].$$

故 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

或求矩阵方程的解:

1. 合并 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}, \text{合并: } \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & -12 \end{pmatrix}$$

2. 解矩阵方程:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

或手工计算:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2r_1+r_2, \\ -r_1+r_3, \\ -3r_1+r_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & -1 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 10 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-r_3+r_2, \\ -r_3+r_4}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 13 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{3r_4+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 36 & -54 \\ 0 & 3 & 13 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-18r_2+r_3, \\ \frac{1}{2}r_2}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 13 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{-13r_2+r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}r_4, \\ -4r_4+r_1}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_4 \leftrightarrow r_3, \\ r_3 \leftrightarrow r_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

> 线性相关

如果存在 m 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ 成立, 则称 $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

例5. (《线性代数》P.100, 3(3))

1. 输入如下4个向量:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

2. 合并 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{合并: } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ -3 & 6 & -5 & -1 \\ -2 & -9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. 解矩阵方程或求秩

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ -3 & 6 & -5 & -1 \\ -2 & -9 & 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} \frac{153}{37}t_4 \\ -\frac{54}{37}t_4 \\ -\frac{164}{37}t_4 \\ t_4 \end{pmatrix}.$$

或 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ -3 & 6 & -5 & -1 \\ -2 & -9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 秩: 3, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

或手工计算:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ -3 & 6 & -5 & -1 \\ -2 & -9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-3r_2 + r_1, \\ 3r_2 + r_3, \\ 2r_2 + r_4}} \begin{pmatrix} 0 & 29 & -10 & -2 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & -24 & 7 & -4 \\ 0 & -29 & 10 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_4} \begin{pmatrix} 0 & 29 & -10 & -2 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & -24 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 0 & 29 & -10 & -2 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & -24 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 & -6 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & -24 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & -24 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & -34 \\ 0 & -24 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & -24 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -8 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

有非零解, 线性相关. (方阵 $A, \text{rank}(A) = 3 < 4$)

> 线性无关

不线性相关的向量组称为线性无关. 如果 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$ 必有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

例6. (《线性代数》P.100, 3(2))

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 8 & 13 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{故 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关.}$$

或手工计算:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 8 & 13 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2r_1 + r_2, \\ -3r_1 + r_3}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{5r_3 + r_1, \\ -3r_3 + r_2}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}r_2, \\ -3r_2 + r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

只有零解, 线性无关. (方阵 A , $\text{rank}(A) = 3$)

> 向量组的秩

向量组的一部分向量称为向量组的部分组. 相互表示的两个向量组等价. 部分组线性相关必有原来的向量组线性相关. 反之, 原来向量组线性无关, 则其任何一个部分组也线性无关. 因此, 可以从一个线性无关的部分组扩展成更多向量的线性无关组, 从而形成极大线性无关组. 向量组的极大线性无关组的向量个数称为该向量组的秩. 可以对列向量组组成的矩阵进行行变换, 化为行最简阶梯形矩阵求出极大线性无关组, 剩余的向量用极大线性无关组来线性表示.

例7. (《线性代数》P.102, 8(2))

1. 输入如下4个向量:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

2. 合并 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{合并: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 求矩阵的秩及行最简阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \text{秩: 2, 故极大线性无关组包含2个向量.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. 写出极大线性无关组及剩余向量用极大线性无关组线性表示:

极大线性无关组为 α_1, α_2 , 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$.

或手工计算:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2r_1 + r_2, \\ -3r_1 + r_3, \\ r_1 + r_4, \\ -2r_1 + r_5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{4}r_3, \\ -5r_3 + r_2, \\ 7r_3 + r_5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2r_3 + r_1, \\ r_2 \leftrightarrow r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故极大线性无关组为 α_1, α_2 , 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$.

7.4.4 基、维数与坐标

与 $m \times n$ 矩阵 A 相关的有四种空间: 行向量空间、列向量空间、左零向量空间及右零向量空间. 本章仅研究列向量空间, 即由列向量组成的矩阵, 其极大线性无关组的向量组成.

> 求列向量空间的基

1. 插入点定位于矩阵.

2. 选择运算|矩阵|列基.

► 矩阵+ 列基

例8. (《线性代数》P.102, 10)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \text{列基: } \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$$

> 基向量、过渡矩阵及坐标

n 维向量空间可以有不同的基, 两组基组成的向量组是相互等价的. 一组基用另一组基表示就有相应的过渡矩阵, 一个向量在某个基下的坐标可通过过渡矩阵求出在另一组基的坐标. 坐标与坐标间的关系就是坐标变换.

(1) 基 (判断线性无关: 齐次线性方程是否只有零解或求秩)

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

或求向量组的秩:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{秩: } 3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{秩: } 3$$

或手工计算:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + r_3, -r_2 + r_1]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_1, r_2 \leftrightarrow r_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

只有零解 (秩均为3), 故均线性无关. 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 及 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 均是 $\mathbb{R}^3$ 的基.

(2) 过渡矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

或手工计算:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2+r_1]{r_2+r_3, -r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-r_3+r_1} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1+r_2} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right), \\
& \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

(3) 坐标

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

7.4.5 线性方程组的解的结构

当线性方程组有无穷多个解时, 能否用公式表示其解(通解)成为解线性方程组的终极目标. 任何一个线性方程组均可导出相应的齐次线性方程组. 对应的齐次线性方程组有无穷多个解(非零解)可用其基础解系表示出来, 这些基础解系是向量空间的一个基. 只要再求出原线性方程组的一个特解, 就可写出其通解.

例9. (《线性代数》P.102, 11(2))

1. 输入如下线性方程:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$$

2. 将线性方程组转化为矩阵:

$$\begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{pmatrix}, \text{ 对应矩阵: } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

3. 求增广矩阵的行最简阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \text{ 行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. 写出导出方程的基础解系及原线性方程组的通解:

导出组的基础解系为 $\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{13}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, 令 $x_5 = 0$,

则原线性方程组的特解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 通解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{13}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, (c \in \mathbf{R})$.

或手工计算:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2r_1+r_2, \\ -r_1+r_3, \\ -3r_1+r_4}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & -6 & -6 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 & -5 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{-r_2+r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{-2r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{3r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3+r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -13 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}r_4} \\
 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-r_4+r_1, \\ r_4+r_2, \\ -r_4+r_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{-r_3+r_1, \\ r_3+r_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{2r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & 0 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

导出组的基础解系为 $\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{13}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, 令 $x_5 = 0$,

则原线性方程组的特解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 通解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{13}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, (c \in \mathbf{R})$.

例10. (《线性代数》P.102, 12)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t \end{cases}$$

解是:
$$\begin{cases} \{[x_1 = -x_4 - 1, x_2 = -2x_4 + 1, x_3 = 0]\} & \text{if } p \neq -8 \wedge t = -2 \\ \emptyset & \text{if } t \neq -2 \\ \{[x_1 = 4x_3 - x_4 - 1, x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1]\} & \text{if } p = -8 \wedge t = -2 \\ \emptyset & \text{if } t \neq -2 \wedge p = -8 \end{cases}$$

或手工计算:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2r_1+r_2, \\ -3r_1+r_3, \\ -r_1+r_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2+r_3, \\ 2r_2+r_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{-r_2+r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{if } p \neq -8, \\ -\frac{1}{p+8}r_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

$t \neq -2$ 时, 原线性方程组无解; $t = -2$ 时, 原线性方程组有解.

$$p = -8 \text{ 时, 导出组的基础解系为 } \xi_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{令 } x_3 = x_4 = 0, \text{ 则原线性方程组的特解为 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{通解为 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

$$p \neq -8 \text{ 时, } x_3 = 0, \text{ 导出组的基础解系为 } \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{令 } x_3 = 0, \text{ 则原线性方程组的特解为 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 通解为 } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (c \in \mathbf{R}).$$

§ 7.5 矩阵的对角化

如果 n 阶方阵 A 的主对角元素为 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 其余元素均为零, 则称矩阵 A 为对角矩阵. 解线性方程组就是将增广矩阵化为行最简阶梯形矩阵. 除去自由未知量外, 未知量对应的系数就是一个单位矩阵. 即增广矩阵最后行变换为左上角的对角矩阵. 因此, 如何将一个矩阵分解为对角矩阵也是值得研究的.

7.5.1 行列式

$n \times n$ 矩阵 (a_{ij}) 的行列式是一个数, 通常定义为

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

这里 σ 表示 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的全排列, 且 $(-1)^{\text{sgn}(\sigma)} = \pm 1$, 取决于 σ 是偶排列或奇排列.

注意行列式仅仅对于方阵才有意义.

为了便于学习, 有些教材通过递归形式定义行列式:

- 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的行列式 $|A|$ 是一个数. 当 $n = 1$ 时, 规定 $|A| = a_{11}$; 当 $n > 1$ 时, 规定

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_n \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_n \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

两个定义是等价的. 这样有:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \cdots$$

> 计算方阵的行列式

1. 插入点定位于矩阵.
2. 选择运算|矩阵|行列式.

或

- 用行列式专用符号表示行列式, 选择计算.

► 矩阵+ 行列式

例1.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{行列式: } ad - bc$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \text{行列式: } a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{3,1}a_{2,3} + a_{2,1}a_{1,3}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$$

$$\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{bmatrix}, \text{行列式: } -121\,529$$

可以对单竖线表示的行列式或函数`det` 作用的矩阵, 选择计算, 计算行列式的值.

$$\begin{vmatrix} -35 & 50 \\ 79 & 49 \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad \det \begin{bmatrix} -35 & 50 \\ 79 & 49 \end{bmatrix}$$

可从矩阵特性对话框中选择内置的单竖线作为矩阵的括号形成行列式，或者单击  选择单竖线，或按 `shift + ctrl + backslash` 使用双竖线作为行列式的定界符。

在数学状态下输入 `det`，当输入到 `t` 时自动转换为 `det`。也可单击 ，在对话框中选择此函数。

► 计算

例2.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{bmatrix} = -121\,529$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{vmatrix} = -121$$

> 使用MuPAD自定义DetX函数展示按递归定义计算行列式

1. 选择运算|解方程|定义MuPAD函数。

2. 对话框中设置如下：

- **MuPAD 函数名:** DetX(x)
- **Scientific WorkPlace 名称:** X(x)
- **MuPAD 函数是一个过程:**
 - 检验MuPAD 内部格式文件(.mu 文件).
 - 单击浏览选择所需的DetX.mu文件.

3. 选择确定。

此过程定义了函数X(x),其中n阶矩阵为x,计算以第1列元素展开的n-1阶行列式。

Example 10 (3.) 如上定义函数X(x). 给定矩阵变量名为z,始终按第1列逐阶展开行列式:

► 定义+ 新定义

$$z = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 & -5 \\ 4 & -8 & -3 & 92 \\ -3 & -6 & 7 & 6 \\ 5 & -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

► 计算

$$\begin{aligned} X(z) &= 9X \left(\begin{bmatrix} -8 & -3 & 92 \\ -6 & 7 & 6 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) - 3X \left(\begin{bmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -8 & -3 & 92 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) - 4X \left(\begin{bmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -6 & 7 & 6 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) - \\ &5X \left(\begin{bmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -8 & -3 & 92 \\ -6 & 7 & 6 \end{bmatrix} \right) = 36X \left(\begin{bmatrix} -3 & 92 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) - 96X \left(\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) - 20X \left(\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \right) - \\ &48X \left(\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) + 45X \left(\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 92 \end{bmatrix} \right) - 75X \left(\begin{bmatrix} -3 & 92 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \right) = 275X(-5) - 1116X(-1) + \\ &85X(6) + 840X(92) = 77531 \end{aligned}$$

注意: MuPAD自定义函数DetX(x), 在Scientific WorkPlace中的名称只能取字母X, 方可逐阶展开.

> 行列式的性质

1. 行列式的一行公因数可以提到外面来, 或一个数乘行列式等于这个数乘行列式的任意一行.
2. 交换两行, 行列式变号.
3. 一行的倍数加到另一行去, 行列式不变.
4. 单位矩阵的行列式为1.
5. 行列式的一行为零, 则行列式为零.
6. 行列式有两行相同, 则行列式为零.
7. 如果方阵A是上三角形的矩阵, 则 $\det A$ 等于矩阵A主对角线元素的乘积.
8. $\det A = \det A^T$
9. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

Theorem 11 (4.) 方阵A是可逆矩阵当且仅当 $\det A \neq 0$.

行列式D的递归定义实际上是按它的第1列进行展开, n 阶行列式的 (i, j) 处的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 是指在D中划去所在的第*i*行和第*j*列, 其它元素不动所得到的 $n-1$ 阶行列式, 称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式, 记为 A_{ij} .

> 使用MuPAD自定义DetEAC函数按列查看元素与对应的代数余子式乘积之和

1. 选择运算|解方程|定义MuPAD函数.

2. 对话框中设置如下:

- **MuPAD 函数名:** DetEAC(x,j)
- **Scientific WorkPlace 名称:** $E(x,j)$
- **MuPAD 函数是一个过程:**
 - 检验MuPAD 内部格式文件(.mu 文件).
 - 单击**浏览**选择所需的DetEAC.mu文件.

3. 选择**确定**.

此过程定义了函数 $E(x)$,其中矩阵为 x ,按第 j 列展开行列式.

Example 12 (5.) 如上定义函数 $E(x)$. 给定矩阵变量名为 y ,按第2列展开行列式:

► 定义+ 新定义

$$y = \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 79 \end{bmatrix}$$

► 计算

$$E(y,2) = 55 \det \left(\begin{bmatrix} -35 & 50 \\ 79 & 79 \end{bmatrix} \right) - 56 \det \left(\begin{bmatrix} -85 & -37 \\ -35 & 50 \end{bmatrix} \right) + 97 \det \left(\begin{bmatrix} -85 & -37 \\ 79 & 79 \end{bmatrix} \right)$$

瑞士数学家Cramer在1750年的《线性代数分析导论》中提出了解线性方程组的行列式解法,现今称Cramer法则.

> 利用Cramer法则解线性方程组

例6. (《线性代数》P.64, 15(2))

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 19 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

解: 将上述方程的括号改成配对, 再

► 重写+ 方程作为矩阵形式(未知量列表: x_1, x_2, x_3, x_4)

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 19 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \end{pmatrix}, \text{对应矩阵: } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 7 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & -5 & 3 & 19 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

► 输入矩阵

单击  或  , 在上述结果矩阵中选择并复制线性方程组的系数矩阵到单元格中, 得到 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 同法得到线性方程组的常数向量 $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 19 \\ 4 \end{pmatrix}$.

► 定义+ 新定义

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 19 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

► 可以如同分块矩阵中定义MuPAD函数substitute, 替换矩阵A中的列
SWP中的函数I(x,y,i,j),其中矩阵b替换矩阵x的第i行第j列开始的矩阵.

► 定义+ 新定义

$$D = \det(A)$$

► 计算

$$x_1 = \frac{\det(I(A,b,1,1))}{D} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det(I(A,b,1,2))}{D} = 1$$

$$x_3 = \frac{\det(I(A,b,1,3))}{D} = -1$$

$$x_4 = \frac{\det(I(A,b,1,4))}{D} = 2$$

注意: 不能计算 $|I(A,b,1,1)|$; 如果定义形如 $d_1 = \det(I(A,b,1,1))$,也得不到 d_1 的值. 系统似乎不能重复自定义函数.

7.5.2 特征多项式

方阵A的特征多项式 $f(x)$ 是矩阵 $xE - A$ 的行列式.

> 计算方阵的特征多项式

- 插入点定位于矩阵, 选择运算|矩阵|特征多项式.

► 矩阵+ 特征多项式

例6.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征多项式: } X^3 - 12X^2 + 48X - 64$$

► 计算

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X-4 & -1 & 0 \\ 0 & X-4 & 0 \\ 0 & 0 & X-4 \end{pmatrix}$$

► 计算, 分解

$$\det \begin{pmatrix} X-4 & -1 & 0 \\ 0 & X-4 & 0 \\ 0 & 0 & X-4 \end{pmatrix} = X^3 - 12X^2 + 48X - 64 = (X-4)^3$$

$$\begin{vmatrix} X-4 & -1 & 0 \\ 0 & X-4 & 0 \\ 0 & 0 & X-4 \end{vmatrix} = X^3 - 12X^2 + 48X - 64 = (X-4)^3$$

7.5.3 特征值及特征向量

给定矩阵 A ，子菜单**矩阵|特征向量及矩阵|特征值**，是求解满足 $Av = cv$ 的常数 c 及非零列向量 v 。如果矩阵中的元素是浮点实数，则解也是实数，否则是精确的符号解或本来就没有解。当求解时没有给出解，则可转换到浮点实数求出数值解。

此时的常数 c 及 v 称为满足特征多项式的特征值及特征向量。

> 计算方阵的特征值

- 插入点定位于矩阵，选择**运算|矩阵|特征值**。

► 矩阵+ 特征值

例7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征值: } \frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{5}{2}, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}$$

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征值: } 5.3723, -0.37228$$

当你选择**矩阵|特征向量**，得到对应特征值的特征向量。与特征值匹配的特征向量可能的多个。有时会返回符号解。当系统没有找到符号解时，可改变为浮点实数以获得数值解。

> 计算方阵的特征向量及特征值

- 插入点定位于矩阵，选择**运算|矩阵|特征向量**。

► 矩阵+ 特征向量

例8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征向量: } \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{33} - \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{33} - \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{5}{2}$$

检验求出的特征值及特征向量是否满足 $Av = cv$ ，以下说明之。

► 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{33} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{33} \\ \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33} \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{33} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{33} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{33} \\ \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33} \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{33} \\ 1 \end{pmatrix}$$

► 矩阵+ 特征向量

例9.

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}, \text{特征向量: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$$

在上例中, 特征值1 是单根, 2 是重根.

► 计算

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

► 矩阵+ 特征向量

例10.

$$\begin{pmatrix} 49 & -69 & 99 \\ 23 & -81 & 20 \\ 48 & 1.0 & -87 \end{pmatrix}, \text{特征向量: } \left\{ \begin{pmatrix} 0.93733 \\ 0.18622 \\ 0.29451 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 66.398, \left\{ \begin{pmatrix} 0.1599 \\ 0.88794 \\ 0.43127 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -67.$$

$$144, \left\{ \begin{pmatrix} 0.54043 \\ 0.11389 \\ -0.83364 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -118.25$$

7.5.4 向量的内积与正交矩阵

向量的内积

为了计算向量的内积, 可选择自定义工具栏中的点积(内积)符号, 或单击二元运算符工具栏中 , 再选择点积符号. 向量 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 的内积定义为

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

> 计算向量的内积

1. 输入向量内积运算的表达式.
2. 选择计算.

► 计算

例11.

$$(1, 2, 3) \cdot (3, 2, 1) = 10$$

$$[3x, -1, 5] \cdot [1, 1, 1] = 3x + 4$$

变量缺省时假定的是复数状态，你可以利用函数`assume`设置成实数.

► 计算

$$\text{assume}(\text{real}) = \mathbb{R}$$

$$(u, v, w) \cdot (x, y, z) = ux + vy + wz$$

正交矩阵

正交矩阵是实矩阵，其任何两个不同列的向量的内积为0，自身的内积为1. 即矩阵 A 如果满足 $A^T A = E$ ，则称矩阵 A 为正交矩阵.

> 测试矩阵的正交性

1. 插入点定位于矩阵.
2. 选择运算|矩阵|正交测试.

► 矩阵+ 正交测试

例12.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{正交? } True$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{正交? } False$$

7.5.5 实对称矩阵的对角化

如果方阵 $A^T = A$,则称矩阵 A 为对称矩阵. 如果方阵 $A^T = -A$,则称矩阵 A 为反对称矩阵.

如果 A 是实对称矩阵，则必存在正交矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵.

> 线性无关的向量组标准正交化

线性无关的向量组可通过Schmidt正交化，再标准化，成为正交的单位向量组。

例13. (《线性代数》P.125, 12)

1. 输入如下线性无关的向量组并定义：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

2. 输入如下正交变换并定义：

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2 \cdot \beta_1)}{(\beta_1 \cdot \beta_1)} \beta_1, \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3 \cdot \beta_1)}{(\beta_1 \cdot \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3 \cdot \beta_2)}{(\beta_2 \cdot \beta_2)} \beta_2,$$

3. 输入如下标准化并计算：

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|} \beta_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

> 使用MuPAD函数orthog将线性无关的向量组正交化

1. 选择运算|解方程|定义MuPAD函数.

2. 对话框中设置如下：

- MuPAD 函数名: linalg::orthog(x)
- Scientific WorkPlace 名称: $O(x)$
- MuPAD 函数名中输入的是MuPAD过程名称，再检验MuPAD内置函数或自动装载.

3. 选择确定.

此过程定义了函数 $O(x)$,正交化向量组 x .

Example 13 (14.) 如上定义函数 $O(x)$. 正交化矩阵 A 的列向量组：

► 定义+ 新定义

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

► 计算

$$O([\text{col}(A, 1), \text{col}(A, 2), \text{col}(A, 3)]) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} \\ \frac{4}{15} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \right]$$

> 使用MuPAD函数normalize将向量标准化

1. 选择运算|解方程|定义MuPAD函数.

2. 对话框中设置如下:

- MuPAD 函数名: linalg::normalize(x)
- Scientific WorkPlace 名称: $N(x)$
- MuPAD 函数名中输入的是MuPAD过程名称, 再检验MuPAD内置函数或自动装载.

3. 选择确定.

此过程定义了函数 $N(x)$, 标准化向量组 x .

Example 14 (15.) 如上定义函数 $N(x)$. 标准化向量 B 的3个分量:

► 定义+ 新定义

$$B = O([\text{col}(A, 1), \text{col}(A, 2), \text{col}(A, 3)])$$

► 计算

$$(N(B_1), N(B_2), N(B_3)) = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{30}\sqrt{2}\sqrt{15} \\ \frac{1}{15}\sqrt{2}\sqrt{15} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{15} \end{pmatrix} \right)$$

或简单计算:

$$\left(\frac{1}{\|B_1\|} B_1, \frac{1}{\|B_2\|} B_2, \frac{1}{\|B_3\|} B_3 \right) = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{30}\sqrt{2}\sqrt{15} \\ \frac{1}{15}\sqrt{2}\sqrt{15} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{15} \end{pmatrix} \right)$$

> 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵转化为对角矩阵的方法或步骤:

1. 求出特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 的所有根, 即矩阵 A 的所有特征值. 设所有不同特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.
2. 对每个特征值 λ_i , 解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$, 求出一个基础解系, 设为 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{il_i}$.
3. 不同基础解系的向量是相互正交的. 对每个基础解系进行Schmidt正交化和单位化得到正交的单位向量组, 它仍是一个基础解系, 记这个正交的单位向量组为 $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{il_i}$.
4. 由于 A 可以对角化, 故有 $l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$. 令矩阵 P 是由下列向量组为列向量的矩阵:

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{1l_1}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{2l_2}, \dots, \varepsilon_{r1}, \varepsilon_{r2}, \dots, \varepsilon_{rl_r}.$$

例16. (《线性代数》P.125, 14(1))

1. 求矩阵的特征向量:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征向量: } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \\ \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 9$$

——或求矩阵的特征方程及特征根:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征多项式: } X^3 - 9X^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征值: } 9, 0$$

或手工计算:

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right| = \lambda^3 - 9\lambda^2 = 0, \text{解是: } 9, 0$$

$$0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯: } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{基础解系 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{基础解系 } \alpha_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. 输入如下正交变换及并定义:

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. 输入如下标准化并计算:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{15}\sqrt{5} \\ -\frac{4}{15}\sqrt{5} \\ \frac{1}{3}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|} \alpha_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

4. 写出正交矩阵并对角化:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{故 } P \text{ 是正交矩阵.}$$

或手工计算:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[2r_1 + r_3, -r_1]{2r_1 + r_2,} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4r_3 + r_1]{-r_3 + r_2,} \begin{pmatrix} 0 & 18 & -18 \\ 0 & 9 & -9 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2 + r_1, \frac{1}{9}r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{\frac{1}{2}r_3, 2r_2 + r_3,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

> 非实对称矩阵的对角化

非实对称矩阵不一定能对角化.

例17. (《线性代数》P.125, 9(2))

1. 求矩阵的特征向量:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{特征向量: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -1,$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2.$$

或手工计算:

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0, \text{解是: } 2, -1.$$

$$-1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{基础解系 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

基础解系 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

注意: 此时 $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{1}{4}, \alpha_1 \cdot \alpha_3 = \frac{5}{4}, \alpha_2 \cdot \alpha_3 = \frac{1}{16}$.

2. 输入如下正交变换及并定义:

$$\beta_2 = \alpha_2, \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3 \cdot \beta_2)}{(\beta_2 \cdot \beta_2)} \beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} \\ -\frac{1}{17} \\ 1 \end{pmatrix},$$

3. 输入如下标准化并计算:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|\alpha_1\|} \alpha_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{17}\sqrt{17} \\ \frac{4}{17}\sqrt{17} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|} \beta_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{51}\sqrt{34} \\ -\frac{1}{102}\sqrt{34} \\ \frac{1}{6}\sqrt{34} \end{pmatrix},$$

注意: 此时 $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \frac{1}{34}\sqrt{2}\sqrt{17}, \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3 = \frac{7}{34}\sqrt{17}, \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = 0$.

4. 写出矩阵的对角化:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{17}\sqrt{17} & \frac{2}{51}\sqrt{34} \\ 0 & \frac{4}{17}\sqrt{17} & -\frac{1}{102}\sqrt{34} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{6}\sqrt{34} \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$P^T P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{34}\sqrt{2}\sqrt{17} & \frac{7}{68}\sqrt{2}\sqrt{34} \\ \frac{1}{34}\sqrt{2}\sqrt{17} & 1 & 0 \\ \frac{7}{68}\sqrt{2}\sqrt{34} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{故 } P \text{ 不是正交矩阵.}$$

或手工计算:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 + r_3, \\ -\frac{1}{3}r_2 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -r_1 + r_3, \\ \frac{1}{4}r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例18. 上述的 P 不是正交矩阵, 但 $P^T P$ 是一个实对称矩阵, 同样可对角化:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{34}\sqrt{34} & \frac{7}{34}\sqrt{17} \\ \frac{1}{34}\sqrt{34} & 1 & 0 \\ \frac{7}{34}\sqrt{17} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{特征向量: } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{34}\sqrt{17}\sqrt{34} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \\ \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{7}\sqrt{3}\sqrt{17} \\ \frac{1}{119}\sqrt{17}\sqrt{34} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}, \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{7}\sqrt{3}\sqrt{17} \\ \frac{1}{119}\sqrt{17}\sqrt{34} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1.$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{34}\sqrt{17}\sqrt{34} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7}\sqrt{3}\sqrt{17} \\ \frac{1}{119}\sqrt{17}\sqrt{34} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}\sqrt{3}\sqrt{17} \\ \frac{1}{119}\sqrt{17}\sqrt{34} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2 - \frac{(\beta_2 \cdot \alpha_1)}{(\alpha_1 \cdot \alpha_1)} \alpha_1, \alpha_3 = \beta_3 - \frac{(\beta_3 \cdot \alpha_1)}{(\alpha_1 \cdot \alpha_1)} \alpha_1 - \frac{(\beta_3 \cdot \alpha_2)}{(\alpha_2 \cdot \alpha_2)} \alpha_2,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|\alpha_1\|} \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{1734}\sqrt{2}\sqrt{17}\sqrt{34}\sqrt{51} \\ \frac{1}{51}\sqrt{2}\sqrt{51} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\|\alpha_2\|} \alpha_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{102}\sqrt{3}\sqrt{17}\sqrt{102} \\ \frac{1}{1734}\sqrt{17}\sqrt{34}\sqrt{102} \\ \frac{7}{102}\sqrt{102} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|} \alpha_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{102}\sqrt{3}\sqrt{17}\sqrt{102} \\ \frac{1}{1734}\sqrt{17}\sqrt{34}\sqrt{102} \\ \frac{7}{102}\sqrt{102} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{1734}\sqrt{2}\sqrt{17}\sqrt{34}\sqrt{51} \\ \frac{1}{51}\sqrt{2}\sqrt{51} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{102}\sqrt{3}\sqrt{17}\sqrt{102} \\ \frac{1}{1734}\sqrt{17}\sqrt{34}\sqrt{102} \\ \frac{7}{102}\sqrt{102} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{102}\sqrt{3}\sqrt{17}\sqrt{102} \\ \frac{1}{1734}\sqrt{17}\sqrt{34}\sqrt{102} \\ \frac{7}{102}\sqrt{102} \end{pmatrix}, \text{合并:}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{102}\sqrt{3}\sqrt{17}\sqrt{102} & \frac{1}{102}\sqrt{3}\sqrt{17}\sqrt{102} \\ -\frac{7}{1734}\sqrt{2}\sqrt{17}\sqrt{34}\sqrt{51} & \frac{1}{1734}\sqrt{17}\sqrt{34}\sqrt{102} & \frac{1}{1734}\sqrt{17}\sqrt{34}\sqrt{102} \\ \frac{1}{51}\sqrt{2}\sqrt{51} & \frac{7}{102}\sqrt{102} & \frac{7}{102}\sqrt{102} \end{pmatrix}, \text{正交? True.}$$

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{34}\sqrt{34} & \frac{7}{34}\sqrt{17} \\ \frac{1}{34}\sqrt{34} & 1 & 0 \\ \frac{7}{34}\sqrt{17} & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 \end{pmatrix}.$$

§ 7.6 实二次型

二次型在数学的许多领域中出现, 有深刻的应用背景. 由于二次型是一个多项式, 与对称矩阵密切联系, 它也是线性代数的研究对象.

7.6.1 正交变换的方法化简二次型

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 且 A 是一个对称矩阵, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T A X$ 称为 n 元二次型. 由前面知识可知, 经过正交变换 $X = PY$ 后可化为标准型 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值. 其中对角形矩阵 $B = P^T A P$ 与 A 具有合同关系. $Y^T (P^T A P) Y = Y^T B Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

例子可参见《线性代数》P.128例2等.

7.6.2 配方法化简二次型

对一个二次型, 只要用非退化的线性变换, 而不一定用正交变换来化简成为标准型. 用配方法更具操作性.

在二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中区分 a_{11} 是否为零, 分别进行变量变换:

- 当 $a_{11} \neq 0$, 则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2 + f_1(x_2, \cdots, x_n)$;
- 当 $a_{11} = 0, a_{12} \neq 0$, 令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$, 则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 2a_{12}x_1x_2 + \cdots = 2a_{12}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + \cdots = 2a_{12}y_1^2 + \cdots$.

例1. (《线性代数》P.141, 3(1)) 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2$ 为标准形并求出所用的线性变换.

解:

$$(1) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4)^2 + x_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_2x_3 + x_4^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$$

注意: 上述最后的等式, 一开始先输入 $(x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4)^2 + [x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 - (x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4)^2]$, 再选择最后的方括号, 按下ctrl键同时选择运算|化简, 则得到化简结果.

$$(2) f_1(x_2, x_3, x_4) = x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 = 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2,$$

$$\text{令} \begin{cases} x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_2 - y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases},$$

$$f_1(x_2, x_3, x_4) = 3y_2^2 - 2y_2y_3 + 2y_2y_4 - y_3^2 - 2y_3y_4 + y_4^2$$

注意：上述最后的等式，一开始先定义 $f_1(x_2, x_3, x_4) = x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$ ，再分别定义 $x_2 = y_2 + y_3, x_3 = y_2 - y_3, x_4 = y_4$ ，再输入 $f_1(x_2, x_3, x_4)$ 后按下ctrl键同时选择运算|化简，则得到化简结果。

以下操作类同。

$$(3) f_2(y_2, y_3, y_4) = 3(y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4)^2 + -\frac{4}{3}y_3^2 - \frac{4}{3}y_3y_4 + \frac{2}{3}y_4^2,$$

$$f_3(y_3, y_4) = -\frac{4}{3}y_3^2 - \frac{4}{3}y_3y_4 + \frac{2}{3}y_4^2 = -\frac{3}{4}(y_3 + y_4)^2 + 2y_4^2,$$

$$\text{故 } f_2(y_2, y_3, y_4) = 3(y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4)^2 - \frac{3}{4}(y_3 + y_4)^2 + 2y_4^2.$$

$$(4) \text{ 由此 } f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)^2 + 3(y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4)^2 - \frac{3}{4}(y_3 + y_4)^2 + 2y_4^2$$

$$\text{令 } \begin{cases} z_1 = y_1 = x_1 + x_2 \\ z_2 = y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4 \\ z_3 = y_3 + y_4 \\ z_4 = y_4 \end{cases},$$

$$\text{则 } f(x_1, x_2, x_3, x_4) = z_1^2 + 3z_2^2 - \frac{3}{4}z_3^2 + 2z_4^2.$$

所用的线性变换：

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

$$\text{故 } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z.$$

7.6.3 正定二次型

设有二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，如果对于任意一组不全为零的数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ ，都有 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$ ，则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个正定二次型。 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是正定二次型的当且仅

当 $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$ 是它的规范型, 当且仅当它的系数矩阵的顺序主子式都大于零. 在SWP中可通过它的系数矩阵来判别它是否是正定的.

例2. (《线性代数》P.141, 5) 判别下列二次型的正定性

(1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2^2 + 4x_3^2;$

(2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 6x_3^2.$

解: (1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 插入点定位于矩阵处, 选择运算|矩阵|正定测试:

► 矩阵+ 正定测试

$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 是正定的.

或: $5 > 0, \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80 > 0.$

(2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, 插入点定位于矩阵处, 选择运算|矩阵|正定测试:

► 矩阵+ 正定测试

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 不是正定.

或: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 < 0.$



苏州大学精正楼（数学楼）

¹ 本档利用科学工作平台Scientific WorkPlace 5.5配置的PDF $\LaTeX$ 进行排版, 利用内置的计算机代数系统MuPAD 3.1.1进行运算.