

线性代数同步练习册

苏州大学数学科学学院 朱广俊 潘洪亮

2020年2月6日修订

目录

第一章 线性方程组与消元法	1
第二章 矩阵 (1)	5
第二章 矩阵 (2)	9
第四章 矩阵的进一步讨论 (1)	13
第四章 矩阵的进一步讨论 (2)	17
习题课 (1)	21
第四章 矩阵的进一步讨论 (3)	25
第五章 向量组与解空间 (1)	29
第五章 向量组与解空间 (2)	33
习题课 (2)	37
第五章 向量组与解空间 (3)	41
第三章 行列式 (1)	45
第三章 行列式 (2)	49
复习课 (1)	53
复习课 (2)	57

¹ 本文档利用科学工作平台Scientific WorkPlace V5.5配置的PDF $\LaTeX$ 进行排版, 并且利用MuPAD V3.1进行有关的运算。

第一章 线性方程组与消元法

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、选择题

1. 线性方程组 $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$ 的解的情形为 ()
 A. 无穷多个解 B. 惟一解 C. 不存在
2. 线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ 的解情形 ()
 A. 惟一解 B. 无穷多个解 C. 不存在

二、填空题

3. 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = -4, \\ 5x_1 + 7x_2 = 11 \end{cases}$ 的解为
 (a) $x_1 =$ _____,
 (b) $x_2 =$ _____.
4. 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$ 的解为
 (a) $x_1 =$ _____,
 (b) $x_2 =$ _____,
 (c) $x_3 =$ _____.
5. 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ 的解为
 (a) $x_1 =$ _____,
 (b) $x_2 =$ _____,
 (c) $x_3 =$ _____.

三、解答题

6. 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_4 = 0 \end{cases}$$
 是否有解? 当有解时, 求出它的所有解.

7. 讨论参数 k 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 + k, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 + 3k, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 - k \end{cases}$$
 无解, 有解. 若有解, 求出其一般解.

8. 当 λ 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$
 无解? 当 λ 为何值时, 此方程组有惟一解?

第二章 矩阵 (1)

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、填空题

1. 设 A, B, C 是同型的矩阵, 则 $A + (B + C) - (A + B) =$ _____,
 $A(B + C) - (AB + AC) =$ _____.

2. $(AB)^T =$ _____. 设 k 是常数, 则 $(kA)^T =$ _____.

二、解答题

3. 已知 $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

计算: (1) $A + B$; (2) $A - B$; (3) $4A + 3B - 2C$.

4. 若 A, B 为同阶方阵, 则 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 的充要条件是什么?

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
计算 AB 及 $A^T C^T$.

6. 计算下列矩阵的乘积:

$$(1) \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1, -1); \quad (3) \begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

7. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$, a_1, a_2, a_3 为互不相等的非零实数, 求所有与 A 交换的矩阵.

8. 已知 $n \in \mathbf{N}$ ($n > 0$), $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^n .

第二章 矩阵 (2)

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、填空题

1. 设 A 是 n 阶矩阵, 如果 $A^T =$ _____, 则称 A 为对称矩阵;
如果 $A^T =$ _____, 则称 A 为反对称矩阵.
2. 已知 A, B 为可逆矩阵, 且常数 $k \neq 0$, 则 $(kA)^{-1} =$ _____,
 $(AB)^{-1} =$ _____. 已知 A 为可逆矩阵, 则 $(A^T)^{-1} =$ _____.

二、解答题

3. 已知 $f(x) = x^2 - 8x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2 阶矩阵, 求 $f(A)$.

4. 已知方阵 A 满足 $A^2 + 2A - 3E = \mathbf{0}$, 证明: A 及 $A - 2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A - 2E)^{-1}$.

5. 将下列矩阵化为行阶梯形矩阵及行最简阶梯形矩阵:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. 对增广矩阵作初等行变换求解线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

7. 对增广矩阵作初等行变换求解线性方程组:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$$

8. 对增广矩阵作初等行变换求解线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

第四章 矩阵的进一步讨论 (1)

专业: _____ 学号: _____ 姓名: _____

一、填空题

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB - 2B =$ _____.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $AB - B =$ _____.

3. (1) 已知 A 和 B 均为可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} =$ _____.

(2) 已知 A 和 B 均为可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} =$ _____.

4. 设 $A = PBQ$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q =$
 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $B =$ _____.

二、解答题

5. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

7. 用初等行变换将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 化为行阶梯形矩阵、行最简阶梯形矩阵.

8. 已知 $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,
求 $P_1^{2016} A P_2^{2017}$.

第四章 矩阵的进一步讨论 (2)

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、填空题

1. 设 $A_{m \times n}, (A|b)$ 分别为线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵与增广矩阵, 则 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是_____.
有惟一解的充分必要条件是_____.
有无穷多个解的充分必要条件是_____.
2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $\text{rank}(A) =$ _____.
3. 已知3阶矩阵 B 的秩为2, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 AB 的秩为_____.

二、解答题

4. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & -9 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, 求 $\text{rank}(A)$.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $\text{rank}(A)$.

7. 设 $(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是线性方程组的增广矩阵，用矩阵的秩判断此方程组解的情形.

8. 用矩阵的秩判断线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$
 解的情形.

习题课 (1)

专业: _____ 学号: _____ 姓名: _____

一、选择题

1. 下列矩阵与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 乘法可交换的是 ()

A. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. 设矩阵 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆阵, 则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} =$ ()

A. $A^{-1}+B^{-1}$ B. $A(A+B)^{-1}B$ C. $(A+B)^{-1}$ D. $A+B$

二、填空题

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, 则 $AB^T =$ _____.

4. (1) 已知 A 和 B 均为可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$ _____.

(2) 已知 A 和 B 均为可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} =$ _____.

三、解答题

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 其中 P 为 3 阶可逆阵, 求:
- (1) A^4 ; (2) A^{2004} ; (3) $B^{2004} - 2A^2$.

6. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 则 $x =$ _____.

7. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 + 5A - 4E = 0$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵, 证明:
 A 可逆, 并求其逆矩阵.

8. 讨论 k 为何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + kx_2 + x_3 = k, \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k^2 \end{cases}$$
- (1) 有惟一解; (2) 有无穷多个解; (3) 无解.

第四章 矩阵的进一步讨论 (3)

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、填空题

1. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1} =$ _____.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & x \\ \frac{3}{10} & y \end{pmatrix}$, 且 $B = A^{-1}$, 则 $x =$ _____,
 $y =$ _____.

3. 设 $A, B, A+B$ 都是 n 阶可逆矩阵, 则 $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} =$ _____.

二、解答题

4. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

5. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

7. 已知矩阵方程 $X = AX + B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, 求 X .

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 解矩阵方程 $XA = B$.

第五章 向量组与解空间 (1)

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、选择题

1. 集合 $V = \{x = (0, x_2, x_3, \dots, x_n)^T \mid x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$ 是一个向量空间. ()

A. 错误 B. 正确

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为三个已知的 n 维向量, 集合 $V = \{x \mid x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{R}\}$ 是一个向量空间. ()

A. 错误 B. 正确

二、填空题

3. 已知 $\alpha = (3, 5, 7, 9)^T, \beta = (-1, 5, 2, 0)^T$, x 满足 $2\alpha + 3x = \beta$, 则 $x =$ _____.

4. 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, 则 $x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3$
= _____.

三、解答题

5. 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$
求向量 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$.

6. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$
问 β 是否可以表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

$$7. \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix},$$

问 β 是否可以表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

8. 试将 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 表示成 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$

$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的线性组合.

第五章 向量组与解空间 (2)

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、填空题

1. 已知向量组 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)$, $\alpha_2 = (3, 6, 3)$, 则 α_1, α_2 线性_____.

2. (1) 单独一个零向量是线性_____. (2) 任何一个非零向量是线性_____.

3. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -x \\ -2x \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$,

若此向量组的秩为2, 则 $x =$ _____.

二、解答题

4. 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$,

试问: 当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关? 当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关? 并将 α_3 表示成 α_1, α_2 的线性组合.

5. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3$ 线性无关.

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_2 = 3\alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$. 试判断向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性相关还是线性无关.

7. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$

- (1) 求该向量组的秩;
- (2) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组;
- (3) 将其余向量用该极大线性无关组表示.

8. 已知向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 具有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的一个极大线性无关组.

习题课 (2)

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、选择题

1. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集 $S = \{x | Ax = 0\}$ 是一个向量空间. ()

A. 错误 B. 正确

2. 向量组 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ 必线性
无关. ()

A. 错误 B. 正确

二、填空题

3. 两个成比例的向量是_____. 含有零向量的向量组必_____.

4. 若一个向量组的部分组线性相关, 则该向量组必_____.

若一个向量组线性无关, 则该向量组的任何部分组必_____.

三、解答题

5. 问 λ 为何值时, 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ 线性相关.

6. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明: $\beta_1 = 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = 5\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3$ 线性无关.

7. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- (1) 求该向量组的秩;
- (2) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组;
- (3) 将其余向量用该极大线性无关组表示.

8. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ t \\ 11 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix},$

$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},$ 问: (1) 当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? (2)

当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关? (3) 当 t 为何值时, α_3 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性表示.

第五章 向量组与解空间 (3)

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、填空题

1. 线性无关的向量组 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的
_____, $\dim(\mathbf{R}^3) =$ _____.
2. 设 A 为 2 阶方阵, 且 $\text{rank}(A) = 1$, α_1, α_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个不同的解向量, 则 $Ax = 0$ 的通解为_____.
3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解向量, 且 $\text{rank}(A) = 3$, $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 2, 3)^T$, 则线性方程组 $Ax = b$ 的通解为_____.
4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, 若 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_r\alpha_r$ 也是 $Ax = b$ 的解, 则 $c_1 + c_2 + \dots + c_r =$ _____.

二、解答题

5. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的基.

6. 求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$
 的基础解系及其通解.

7. 求线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$$
 的导出组的一个基础解系,
并求出线性方程组的通解.

8. 已知下列非齐次线性方程组:

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1. \end{cases}$$

求: (1) 解方程组(I), 用其导出组的基础解系表示其通解;

(2) 当方程组(II)中的参数 m, n, t 为何值时, 方程组(I)与(II)同解.

第三章 行列式 (1)

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、填空题

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 6$, 则行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 0 \\ a_{21} & 2a_{22} & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、解答题

5. 计算下列行列式: $\begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 138 & 7 \end{vmatrix}.$

6. 计算下列行列式: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$

7. 计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 9 & 6 \\ 1 & 10 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

8. 用行列式的性质证明下列等式:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

第三章 行列式 (2)

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、填空题

$$1. \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \text{——} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

$$2. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{——}.$$

$$3. \text{ 已知 } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = p, \text{ 则 } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \text{——}.$$

$$4. \text{ 已知 } \begin{vmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ g & h & i \end{vmatrix} = q, \text{ 则 } \begin{vmatrix} a & b & c \\ l+d & m+e & n+f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \text{——}.$$

二、解答题

5. 计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}.$$

6. 计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

7. 计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

8. 利用克拉姆法则解下列线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

复习课 (1)

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、选择题

1. 下列矩阵中为行阶梯形矩阵的是 _____.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2. 下列矩阵中为行最简阶梯形矩阵的是 _____.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3. 设 3 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的秩为 _____.

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

4. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 $(AB)^2 = E$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵. 下列结论正确的是 _____.

- (A) $A^{-1} = B$. (B) $AB = E$.
(C) $AB = \pm E$. (D) $A^{-1} = BAB$.

二、填空题

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 A 的转置矩阵 $A^T =$ _____.

6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $AB = BA$, 则 $B =$ _____.

7. 设矩阵 A 和 X 满足 $AX = A + 2X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则矩阵 $X =$ _____.

三、解答题

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 求 $A - BA$.

9. λ 为何值时，线性方程方程
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2, \\ x_1 + x_2 - \lambda x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda \end{cases}$$
 有解，有解时求出解.

10. (1) 已知 A, B 是 n 阶方阵, 且 E 是 n 阶单位矩阵, $A + B = AB$, 问 $A - E$ 是否可逆? 如可逆, 试求出其逆矩阵.

(2) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A 的逆矩阵 A^{-1} .

复习课 (2)

专业:_____学号:_____姓名:_____

一、选择题

1. 设 V 是 n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间, 其中 A 的秩为 $\text{rank}(A) = r$, 则 V 的基础解系中包含的向量个数为 _____.

(A) $n - r$. (B) r . (C) $r - n$. (D) n .

2. 已知 n 元齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 m , 如果该方程组有非零解, 则 m 与 n 的大小关系为 _____.

(A) $m > n$. (B) $m < n$.
(C) $m = n$. (D) 不能确定.

二、填空题

3.
$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. 将向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ 表示为 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的线性组合, 则

它的表达式为 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

5. 用克拉默法则解线性方程组:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_2 = 15, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$$

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.
试判断向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性相关还是线性无关.

7. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩;
- (2) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组;
- (3) 将其余向量表为该极大线性无关组的线性组合.

8. 求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1, \end{cases}$$

导出的齐次线性方程组的一个基础解系,并求出非齐次线性方程组的通解.