苏州大学理工类高等数学（课次练习）下册解答（2006 版）

苏州大学数学科学学院　丰世富　潘洪亮

2020 年 11 月 4 日

目录

[1]本文档利用 Scientific WorkPlce 5.5 内置的 MuPAD 或 Maple 进行数值计算、符号运算及绘图，并使用内置的 XeLaTeX 进行排版.

1　多元函数的基本概念

一、　已知 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

解　设 $u=x+y,v=\frac{y}{x}$, 则 $x=\frac{u}{1+v},y=\frac{uv}{1+v},v\neq-1$. 从而 $f(u,v)=(\frac{u}{1+v})^2-(\frac{uv}{1+v})^2=u^2\frac{1-v}{1+v}$, 即 $f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y},y\neq-1$.

二、　求下列函数的定义域：

1. $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}-\frac{1}{\sqrt{x-y}}$;

   解　由题意，有 $\begin{cases} x+y>0, \\ x-y>0, \end{cases}$ 故定义域为 $\{(x,y)|x+y>0,x-y>0,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$.

2. $z=\ln(y-x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

   解　由题意，有 $\begin{cases} y-x>0, \\ 1-x^2-y^2>0, \\ x\geqslant 0, \end{cases}$ 故定义域为 $\{(x,y)|x^2+y^2<1,0\leqslant x<y,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$.

3. $z=\ln((9-x^2-y^2)(x^2+y^2-1))$.

解　由题意，有 $(9-x^2-y^2)(x^2+y^2-1)>0$, 即 $1<x^2+y^2<9$, 故定义域为 $\{(x,y)|1<x^2+y^2<9,x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$.

三、　求下列极限，若不存在，说明理由.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$;

   解　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=\frac{1-xy}{x^2+y^2}|_{x=0,y=1}=1$.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$;

   解　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}{x^2+y^2}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin^2\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}{(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2})^2}=\frac{1}{2}.$

或 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}.$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x+y}$;

解　不存在. 因为令 $y=kx(k\neq-1)$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x+y}=\frac{1}{1+k}$，与斜率 k 有关，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x+y}$ 不存在.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}$.

解　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(\sqrt{1+xy}+1)}{(\sqrt{1+xy}-1)(\sqrt{1+xy}+1)}$
$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{1+xy}+1)=2.$

四、 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\sin(x-2y)}{x-2y}, & x\neq 2y,\\ 0, & x=2y\end{cases}$ 的连续性.

解　$f(0,0)=0.x=2y$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0;x\neq2y$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin(x-2y)}{x-2y}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x-2y)}{x-2y}=0$. 于是 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续. 在 $x=2y$ 上除点 $(0,0)$ 外点 (a,b)，$f(a,b)=0$, 但 $x=2y$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=0;x\neq2y$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}\frac{x\sin(x-2y)}{x-2y}=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}x\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}\frac{\sin(x-2y)}{x-2y}=a\neq0$. 即 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处不连续. 在 $x\neq2y$ 的点上，$f(x,y)=\frac{x\sin(x-2y)}{x-2y}$ 显然连续.

五、 设 $f(x,y)=\sin x$，证明：对任意 $(x_0,y_0),x_0\in\mathbb{R},y_0\in\mathbb{R},f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

证明　因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\sin x=\sin x_0=f(x_0,y_0)$, 故 $f(x,y)=\sin x$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

2　偏导数、全微分

一、　计算：

1. 设 $f(x,y)=xy+\frac{x}{x^2+y^2}$, 求 $f'_x(0,1),f'_y(0,1)$;

   解　因为 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(xy+\frac{x}{x^2+y^2})=y+\frac{x^2+y^2-x\times 2x}{(x^2+y^2)^2}=y-\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(xy+\frac{x}{x^2+y^2})=x-\frac{x\times 2y}{(x^2+y^2)^2}=x-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, 故

   $f'_x(0,1)=\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,1)}=(y-\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2})\Big|_{x=0,y=1}=2,$

   $f'_y(0,1)=\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,1)}=(x-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2})\Big|_{x=0,y=1}=0.$

2. 设函数 $z=f(x,y),\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$, 且 $f(x,0)=1,f'_y(x,0)=x$, 求 $f(x,y)$.

   解　因为 $f'_y(x,0)=x$,

二、　求下列函数的一阶偏导数：

1. $u=x^{y^z}$;

   解　因为 $u=e^{y^z\ln x}$, 故 $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{y^z\ln x}\frac{y^z}{x}=x^{y^z-1}y^z$; 又因为 $u=e^{e^{z\ln y}\ln x}$, 故 $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{e^{z\ln y}\ln x}(\ln x)e^{z\ln y}\frac{z}{y}=x^{y^z}y^{z-1}z\ln x$; $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{e^{z\ln y}\ln x}(\ln x)e^{z\ln y}\ln y=x^{y^z}y^z(\ln x)\ln y$.

2. $F(x,y)=\int_y^{xy}f(s)ds+\int_0^1 e^{x^2}dx$;

   解　因为 $F(x,y)=\int_y^{xy}f(s)ds+\int_0^1 e^{x^2}dx=-\int_0^y f(s)ds+\int_0^{xy}f(s)ds+\int_0^1 e^{x^2}dx$, 故 $\frac{\partial F}{\partial x}=0+f(xy)y+0=yf(xy)$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-f(y)+f(xy)x+0=xf(xy)-f(y)$.

3. $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$.

   解　　因为 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$, 故 $\frac{\partial f}{\partial x}=1+(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\frac{1}{y}=1+\frac{|y|(y-1)}{2y\sqrt{xy-x^2}}$,

   $\frac{\partial f}{\partial y}=0+\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}+(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}(-\frac{x}{y^2})=\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{x(y-1)}{2|y|\sqrt{xy-x^2}}$.

三、 求下列函数的二阶偏导数：

1. $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;

   解 因为 $z=x^4+y^4-4x^2y^2$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+0-8xy^2=4x^3-8xy^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0+4y^3-8x^2y=4y^3-8x^2y$,

   $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=12x^2-8y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial xy}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=-16xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=12y^2-8x^2$.

2. $z=x^y$.

   解 因为 $z=x^y=e^{y\ln x}$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{y\ln x}\frac{y}{x}=x^{y-1}y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y\ln x}\ln x=x^y\ln x$,

   $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=e^{y\ln x}(\frac{y}{x})^2+e^{y\ln x}(-\frac{y}{x^2})=x^{y-2}y(y-1)$,

   $\frac{\partial^2 z}{\partial xy}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=e^{y\ln x}\frac{y\ln x}{x}+e^{y\ln x}\frac{1}{x}=x^{y-1}y\ln x+x^{y-1}$,

   $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=e^{y\ln x}(\ln x)^2=x^y(\ln x)^2$.

四、 设 $z=e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$, 求证：$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

解 因为 $z=e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}\frac{1}{y^2}$, $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=2z$.

五、 求下列函数的全微分：

1. $z=e^xy\sin(x+y)$;

   解 因为 $z=e^xy\sin(x+y)$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^xy\sin(x+y)+e^xy\cos(x+y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=e^x\sin(x+y)+e^xy\cos(x+y)$,

   $dz=e^xy(\sin(x+y)+\cos(x+y))dx+e^x(\sin(x+y)+y\cos(x+y))dy$.

2. $u=x^{xyz}$;

   解 因为 $u=x^{xyz}=e^{xyz\ln x}$, 故 $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{xyz\ln x}yz(\ln x+1)=x^{xyz}yz(\ln x+1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=e^{xyz\ln x}xz\ln x=x^{xyz}xz\ln x$,

   $\frac{\partial u}{\partial z}=e^{xyz\ln x}xy\ln x=x^{xyz}xy\ln x$, $du=x^{xyz}yz(\ln x+1)dx+x^{xyz}xz(\ln x)dy+x^{xyz}xy(\ln x)dz$.

3. $z=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 求 $dz|_{(1,1)}$.

解 因为 $z=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 故 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}2x=\frac{x}{x^2+y^2+1}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}2y=\frac{y}{x^2+y^2+1}$,

$dz|_{(1,1)}=\frac{x}{x^2+y^2+1}\Big|_{x=1,y=1}dx+\frac{y}{x^2+y^2+1}\Big|_{x=1,y=1}dy=\frac{1}{3}dx+\frac{1}{3}dy.$

六、 求 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数.

解 因为 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 故 $\frac{\partial u}{\partial x}=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x,0)-f(0,0)}{\triangle x}=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{|\triangle x|}{\triangle x}$ 不存在，同法，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 也不存在.

3 多元复合函数的求导法则

一、 计算：

1. 设 $z=xy+x^3$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$;

解 因为 $z=xy+x^3$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=(y+3x^2)+x=3x^2+x+y.$

2. 设 $z=f(e^x\sin y,\frac{y}{x})$, 其中 $f(x,y)$ 可微，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

解 因为 $z=f(e^x\sin y,\frac{y}{x}),f(x,y)$ 可微，故

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'(e^x\sin y)+f_2'(-\frac{y}{x^2})=f_1'e^x\sin y-\frac{y}{x^2}f_2'.$

二、 设 $u=e^{x^2+y^2+z^2},z=x^2\sin y$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 因为 $u=e^{x^2+y^2+z^2},z=x^2\sin y$, 故 $u=e^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}(2x+4x^3\sin^2 y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=e^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}(2y+x^4 2\sin y\cos y)=e^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}(2y+x^4\sin 2y)$.

三、 设 $u=f(xy,x^2+y^2)$, 且 f 可微，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 因为 $u=f(xy,x^2+y^2)$, 且 f 可微，故

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=f_1'y+f_2'(2x)=2xf_2'+yf_1',$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=f_1'x+f_2'(2y)=2yf_2'+xf_1'$.

四、 设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1},y=a\sin x,z=\cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.

解 因为 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1},y=a\sin x,z=\cos x$, 故 $u=\frac{e^{ax}(a\sin x-\cos x)}{a^2+1}$,

$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(\frac{e^{ax}(a\sin x-\cos x)}{a^2+1})=\frac{ae^{ax}(a\sin x-\cos x)+e^{ax}(a\cos x+\sin x)}{a^2+1}=e^{ax}\sin x$.

五、 已知 $z=f(x^2y,\ln(xy))$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 因为 $z=f(x^2y,\ln(xy))$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'(2xy)+f_2'(\frac{1}{xy}y)=\frac{1}{x}f_2'+2xyf_1'$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'x^2+f_2'(\frac{1}{xy}x)=x^2f_1'+\frac{1}{y}f_2'$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(x^2f_1'+\frac{1}{y}f_2')=2xf_1'+x^2(\frac{1}{x}f_{21}''+2xyf_{11}'')+\frac{1}{y}(\frac{1}{x}f_{22}''+2xyf_{12}'')=2xf_1'+xf_{21}''+2xf_{12}''+\frac{1}{xy}f_{22}''$.

六、 设 $z=f(u,x,y),u=xe^y$, 其中 f 连续偏导，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 因为 $z=f(u,x,y),u=xe^y$, 其中 f 连续偏导，故

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}=f_u'e^y+f_x',\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}=f_u'xe^y+f_y'$.

七、 设 $u=xf(2x+3y,e^{y+z})$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

解 因为 $u=xf(2x+3y,e^{y+z})$, 故 $\frac{\partial u}{\partial y}=x(f_1'3+f_2'e^{y+z})=x(3f_1'+f_2'e^{y+z})$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})=x\frac{\partial}{\partial y}(3f_1'+f_2'e^{y+z})=3x(3f_{11}''+f_{21}''e^{y+z})+x(f_2'e^{y+z}+e^{y+z}(3f_{12}''+f_{22}''e^{y+z}))$

$=9xf_{11}''+3xe^{y+z}f_{21}''+xe^{y+z}f_2'+3xe^{y+z}f_{12}''+xe^{y+z}f_{22}''$.

八、 设函数 u 满足 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$, 作变换 $\xi=x,\eta=y-x,\zeta=z-x$,

求证：$\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$.

证明 因为 $\xi=x,\eta=y-x,\zeta=z-x$, 故 $x=\xi,y=\eta+\xi,z=\zeta+\xi$, 从而

$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\times 1+\frac{\partial u}{\partial y}\times 1+\frac{\partial u}{\partial z}\times 1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$

4 隐函数的求导法则、多元微积分的几何应用 (1)

1. 设 $e^y+\sin(x+y)-x^2=0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

   解 令 $F(x,y)=e^y+\sin(x+y)-x^2$, 则 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{\cos(x+y)-2x}{e^y+\cos(x+y)}$.

2. 设 $x+y+z=\sqrt{xyz}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

   解 令 $F(x,y,z)=x+y+z-\sqrt{xyz}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{xyz}}yz}{1-\frac{1}{2\sqrt{xyz}}xy}=-\frac{2\sqrt{xyz}-yz}{2\sqrt{xyz}-xy}$,

   $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{xyz}}xz}{1-\frac{1}{2\sqrt{xyz}}xy}=-\frac{2\sqrt{xyz}-xz}{2\sqrt{xyz}-xy}$.

3. 设 $x^2+z^2=y\varphi(\frac{z}{y})$, 其中 φ 可微，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

   解 令 $F(x,y,z)=x^2+z^2-y\varphi(\frac{z}{y})$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-\varphi(\frac{z}{y})-y\varphi'(\frac{z}{y})(-\frac{z}{y^2})}{2z-y\varphi'(\frac{z}{y})\frac{1}{y}}=$
   $\frac{y\varphi(\frac{z}{y})-z\varphi'(\frac{z}{y})}{2yz-y\varphi'(\frac{z}{y})}$.

4. 设 $F(x+y,x-y,xy)=0,F$ 可微，求 $\frac{dy}{dx}$.

   解 $F_1'(1+y')+F_2'(1-y')+F_3'(y+xy')=0,\frac{dy}{dx}=y'=\frac{F_1'+F_2'+yF_3'}{F_2'-F_1'-xF_3'}$.

5. 设 $z^3-2xz+y=0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

   解 令 $F(x,y,z)=z^2-2xz+y$, 则 $F_x=-2z,F_y=1,F_z=3z^2-2x$,
   $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2z}{3z^2-2x},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{1}{2x-3z^2}$,
   $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2x-3z^2})=-\frac{2-6z(\frac{2z}{3z^2-2x})}{(2x-3z^2)^2}=\frac{6z^2+4x}{\left(3z^2-2x\right)^3}$,
   $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{2z}{3z^2-2x})=\frac{2(\frac{2z}{3z^2-2x})(3z^2-2x)-2z(6z(\frac{2z}{3z^2-2x})-2)}{(2x-3z^2)^2}=-\frac{16xz}{\left(3z^2-2x\right)^3}$.

6. 设 $\begin{cases} ax+by+cz=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \end{cases}$ 求 $\frac{dz}{dy}\frac{dx}{dy}$.

解 令 $F(x,y,z)=ax+by+cz, G(x,y,x)=x^2+y^2+z^2-1$, 则 $F_x=a, F_y=b, F_z=c, G_x=2x, G_y=2y, G_z=2z$,

$$\frac{dz}{dy}=\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ Gz & G_x \end{vmatrix}}=\frac{F_xG_y-F_yG_x}{F_zG_x-GzF_x}=\frac{ay-bx}{cx-az},$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}}=\frac{F_yG_z-F_zG_y}{F_zG_x-F_xG_z}=\frac{bz-cy}{cx-az}.$$

7. 证明由方程 $f(cx-az,cy-bz)=0$(f 可微) 可微确定的函数 $z=z(x,y)$ 满足：$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1'c}{f_1'(-a)+f_2'(-b)}=\frac{cf_1'}{af_1'+bf_2'}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_2'c}{f_1'(-a)+f_2'(-b)}=\frac{cf_1'}{af_1'+bf_2'}$, 故

$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{cf_1'}{af_1'+bf_2'}+b\frac{cf_1'}{af_1'+bf_2'}=c.$

8. 求曲线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线和法平面方程.

解 因为 $\frac{dx}{dt}|_{t=\frac{\pi}{4}}=-a\sin t|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{dy}{dt}|_{t=\frac{\pi}{4}}=a\cos t|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{dz}{dt}|_{t=\frac{\pi}{4}}=b$, 故切线方程为 $\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{z-\frac{\pi b}{4}}{b}$, 即 $\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{-a}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}a}{a}=\frac{z-\frac{\pi b}{4}}{\sqrt{2}b}$.

法平面方程为 $(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a)(-\frac{\sqrt{2}}{2}a)+(y-\frac{\sqrt{2}}{2}a)(\frac{\sqrt{2}}{2}a)+(z-\frac{\pi b}{4})b=0$, 即 $-ax+ay+\sqrt{2}zb-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi b^2=0$.

9. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线和法平面方程.

解 $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}=F_yG_z-F_zG_y=2y-2z, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}=F_zG_x-F_xG_z=2z-$

$2x, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = F_xG_y - F_yG_x = 2x - 2y$, 在点 $M(1,-2,1)$ 处的值分别为 $-6,0,6$, 从而切线方程为 $\frac{x-1}{--1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{1}$, 即 $\begin{cases} x+z-2=0, \\ y=-2. \end{cases}$ 法平面方程为 $(x-1)(-1)+(z-1)=0$, 即 $x-z=0$.

10. 求曲线 $x=\sin^2 t, y=\sin t\cos t, z=\cos^2 t$ 在点 $M(0.5,0.5,0.5)$ 处的切线和法平面方程.

解 $x=\sin^2 t, y=\sin t\cos t, z=\cos^2 t$ 在点 $M(0.5,0.5,0.5)$ 处时 $t=\frac{\pi}{4}$, 故 $\frac{dx}{dt}|_{t=\frac{\pi}{4}} = 2\sin t\cos t|_{t=\frac{\pi}{4}} = 1, \frac{dy}{dt}|_{t=\frac{\pi}{4}} = \cos^2 t - \sin^2 t\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = 0, \frac{dz}{dt}|_{t=\frac{\pi}{4}} = -2\sin t\cos t|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1$, 故切线方程为 $\frac{x-0.5}{1} = \frac{y-0.5}{0} = \frac{z-0.5}{-1}$, 即 $\begin{cases} x+z-1=0, \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$ 法平面方程为 $x-z=0$.

或由 $x=\sin^2 t, y=\sin t\cos t, z=\cos^2 t$ 消去 t 得 $\begin{cases} x+z=1, \\ y^2-xz=0. \end{cases}$ 因为 $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} = F_yG_z - F_zG_y = -2y, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix} = F_zG_x - F_xG_z = -z+x, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = F_xG_y - F_yG_x = 2y$, 在点 $M(0.5,0.5,0.5)$ 处的值分别为 $-1,0,1$, 故切线方程为 $\frac{x-0.5}{-1} = \frac{y-0.5}{0} = \frac{z-0.5}{1}$, 即 $\begin{cases} x+z-1=0, \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$ 法平面方程为 $x-z=0$.

5 多元微积分的几何应用 (2)、方向导数与梯度

1. 求曲面 $xy=z^2$ 在点 $(1,4,2)$ 处的切平面方程及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=xy-z^2$, 则 $F_x(1,4,2)=y|_{y=4}=4, F_y(1,4,2)=x|_{x=1}=1, F_z(1,4,2)=-2z|_{z=2}=-4$, 故切平面方程为 $4(x-1)+(y-4)-4(z-2)=0$, 即 $4x+y-4z=0$, 法线方程为 $\frac{x-1}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{-4}$.

2. 求曲面 $x^2+y^2+2z^2=4$ 上平行于平面 $x+2y-z=1$ 的切平面方程.

解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-4$, 则 $F_x(x,y,z)=2x, F_y(x,y,z)=2y, F_z(x,y,z)=4z$, 设所求平面与已知曲面的切点为 (x_0,y_0,z_0), 则 $x_0^2+y_0^2+2z_0^2=4$ 且 $\frac{2x_0}{1}=\frac{2y_0}{2}=\frac{4z_0}{-1}$, 得 $x_0=\pm\frac{2\sqrt{22}}{11}, y_0=\pm\frac{4\sqrt{22}}{11}, z_0=\mp\frac{\sqrt{22}}{11}$, 故切平面方程为 $(x\mp\frac{2\sqrt{22}}{11})+2(y\mp\frac{4\sqrt{22}}{11})-(z\pm\frac{\sqrt{22}}{11})=0$, 即 $x+2y-z\mp\sqrt{22}=0$.

3. 求函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处，沿从点 $P(5,1,2)$ 到 $Q(9,4,14)$ 的方向的方向导数.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=yz, \frac{\partial u}{\partial y}=xz, \frac{\partial u}{\partial z}=xy$, 在点 $(5,1,2)$ 处的值分别为 $2,10,5$, 又 $\overrightarrow{PQ}=(9,4,14)-(5,1,2)=(4,3,12), \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}=\frac{(4,3,12)}{\|(4,3,12)\|}=(\frac{4}{13},\frac{3}{13},\frac{12}{13})$, 则所求的方向导数为 $2\times\frac{4}{13}+10\times\frac{3}{13}+5\times\frac{12}{13}=\frac{98}{13}$.

4. 求函数 $u=2xy-z^2$ 在点 $(2,-1,1)$ 处方向导数的最大值.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=2y, \frac{\partial u}{\partial y}=2x, \frac{\partial u}{\partial z}=-2z$, 在点 $(2,-1,1)$ 处的值分别为 $-2,4,-2$, 故函数在该点的梯度为 $\mathrm{grad}\boldsymbol{u}=(-2,4,-2)$, 方向导数的最大值为 $\mathrm{grad}\boldsymbol{u}$ 的模，即 $\|\mathrm{grad}\boldsymbol{u}\|=\|(-2,4,-2)\|=2\sqrt{6}$.

5. 设 $v=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\mathrm{grad}v$.

解 因为 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 故 $\mathrm{grad}v=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k})$

6. 求 $u=x+xy+xyz$ 在点 $(1,2,-1)$ 处的梯度，并求该梯度方向的方向导数.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=1+y+yz, \frac{\partial u}{\partial y}=x+xz, \frac{\partial u}{\partial z}=xy$, 在点 $(1,2,-1)$ 处的值分别为 $1,0,2$, 故 $\mathrm{grad}\boldsymbol{u}=(1,0,2)$, 在该梯度方向的方向导数即为该梯度的模，$\|\mathrm{grad}\boldsymbol{u}\|=\sqrt{5}$.

7. 求 $z=1-(\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2})$ 在点 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内法向量的方向导数.

解 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x}{a^2}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2y}{b^2}$, 在点 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 处的值分别为 $-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{b}$, 曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在该点的内法向量的方向即为 $z=1-(\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2})$ 的等

值线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 在该点的法线方向，从而所求的方向导数即为 $\|\text{grad}z\|=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}$.

8. 设 $\overrightarrow{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量，求函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿 $\overrightarrow{n}$ 方向的方向导数.

   解　令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$, 则 $F_x=4x, F_y=6y, F_z=2z$, 在点 $P(1,1,1)$ 处的值分别为 $4,6,2$, 故 $\overrightarrow{n}=(4,6,2), \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}=\frac{(4,6,2)}{\|(4,6,2)\|}=(\frac{\sqrt{14}}{7},\frac{3\sqrt{14}}{14},\frac{\sqrt{14}}{14})$. 又 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}, \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}$, 在点 $P(1,1,1)$ 处的值分别为 $\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{8}{\sqrt{14}}$,
   $-\sqrt{14}$, 从而 $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}|_{(1,1,1)}=\frac{6}{\sqrt{14}}\times\frac{\sqrt{14}}{7}+\frac{8}{\sqrt{14}}\times\frac{3\sqrt{14}}{14}+(-\sqrt{14})\times\frac{\sqrt{14}}{14}=\frac{11}{7}$.

9. 试证：曲面 $xyz=a^2$ 上任意一点处切平面与三个坐标轴所围四面体体积为常数.

   证明　令 $F(x,y,z)=xyz-a^2$, 则 $F_x=yz, F_y=xz, F_z=xy$, 在曲面 $xyz=a^2$ 上任意一点 $P(x_0,y_0z_0)$ 处的切平面方程为 $(x-x_0)y_0z_0+(y-y_0)x_0z_0+(z-z_0)x_0y_0=0$, 其中 $x_0y_0z_0=a^2$. 切平面方程可化简为 $y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z-3a^2=0$, 与坐标轴 x,y,z 的交点为 $(\frac{3a^2}{y_0z_0},0,0),(0,\frac{3a^2}{x_0z_0},0),(0,0,\frac{3a^2}{x_0y_0})$. 从而所求的四面体体积为 $V=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\frac{3a^2}{y_0z_0}\times\frac{3a^2}{x_0z_0})\frac{3a^2}{x_0y_0}=\frac{9a^6}{2x_0^2y_0^2z_0^2}=\frac{9a^2}{2}$, 是一个常数.

6　多元函数的极值及其求法

1. 求 $f(x,y)=xy-xy^2-x^2y$ 的极值.

   解　因为 $f_x=y-y^2-2xy, f_y=x-2xy-x^2$, 解方程组 $\begin{cases} y-y^2-2xy=0, \\ x-2xy-x^2=0, \end{cases}$ 得驻点为 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3}),(0,1),(0,0),(1,0)$. 又 $A=f_{xx}=-2y, B=f_{xy}=1-2y-2x, C=f_{yy}=-2x, \Delta(x,y)=AC-B^2=4xy-(1-2y-2x)^2$.

   由于 $\Delta(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=4xy-(1-2y-2x)^2\big|_{x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}>0, A=-\frac{1}{3}<0$, 故有

极大值.$f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=xy-xy^2-x^2y\big|_{x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{3}}=\frac{1}{27}$;
$\Delta(0,1)=4xy-(1-2y-2x)^2\big|_{x=0,y=1}=-1<0$, 故没有极值;
$\Delta(0,0)=4xy-(1-2y-2x)^2\big|_{x=0,y=0}=-1<0$, 故没有极值;
$\Delta(1,0)=4xy-(1-2y-2x)^2\big|_{x=1,y=0}=-1<0$, 故没有极值.

2. 求 $f(x,y)=(x^2+2x+y)e^{2y}$ 的极值点与极值.

解　因为 $f_x=(2x+2)e^{2y}, f_y=e^{2y}+2(x^2+2x+y)e^{2y}$, 解方程组 $\begin{cases}(2x+2)e^{2y}=0,\\ e^{2y}+2(x^2+2x+y)e^{2y}=0,\end{cases}$ 得驻点为 $(-1,\frac{1}{2})$. 又 $A=f_{xx}=2e^{2y}, B=f_{xy}=(4x+4)e^{2y}, C=f_{yy}=2e^{2y}+2e^{2y}+4(x^2+2x+y)e^{2y}, \Delta(x,y)=AC-B^2=8(y-(x+1)^2)$. 由于 $\Delta(-1,\frac{1}{2})=8(y-(x+1)^2)\big|_{x=-1,y=\frac{1}{2}}=4>0, A=2e>0$, 故有极小值 $f(-1,\frac{1}{2})=(x^2+2x+y)e^{2y}\big|_{x=-1,y=\frac{1}{2}}=-\frac{e}{2}$.

3. 求 $z=xy$ 在条件 $x+2y=1$ 下的极值.

解　由条件 $x+2y=1$ 得 $x=1-2y$, 故 $z=xy=y(1-2y)=-2(y-\frac{1}{4})^2+\frac{1}{8}\leqslant\frac{1}{8}$, 当 $y=\frac{1}{4}, x=\frac{1}{2}$ 时取等号. 即所求极大值为 $\frac{1}{8}$.

或用拉格朗日方法: 设 $L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+2y-1)$, 则令 $L_x=y+\lambda=0, L_y=x+2\lambda=0$, 再与 $x+2y-1=0$ 联立，得 $\begin{cases}y+\lambda=0,\\ x+2\lambda=0,\\ x+2y-1=0\end{cases}$ 的解 $\lambda=-\frac{1}{4}, x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{4}$, 故所求的极值为 $\frac{1}{8}$.

4. 设 $u=x+y+z$，求 u 在 $z=2x^2+y^2$ 条件下的极值.

解　设 $L(x,y,z,\lambda)=x+y+z+\lambda(2x^2+y^2-z)$, 则令 $L_x=1+4\lambda x=0, L_y=1+2\lambda y=0, L_z=1-\lambda=0$, 再与 $2x^2+y^2-z=0$ 联立，得 $\begin{cases}1+4\lambda x=0,\\ 1+2\lambda y=0,\\ 1-\lambda=0,\\ 2x^2+y^2-z=0\end{cases}$ 的解 $\lambda=1, x=-\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{2}, z=\frac{3}{8}$, 故所求的极值为 $-\frac{3}{8}$.

5. 设 $u=x-x^2-y^2$，求 u 在区域 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\right\}$ 上的最大值与最小值.

解 $u_x=1-2x, u_y=-2y$, 解方程组 $\begin{cases}1-2x=0,\\ -2y=0,\end{cases}$ 得驻点为 $(\frac{1}{2},0)$. 由于 $(\frac{1}{2},0)\in D, A=u_{xx}=-2, B=u_{xy}=0, C=u_{yy}=-2, \Delta(x,y)=AC-B^2=4>0, A=-2<0$, 故最大值为 $\frac{1}{4}$. 在边界 $x^2+y^2=1$ 上，设 $L(x,y,\lambda)=x-x^2-y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$, 则令 $L_x=1-2x+2\lambda x=0, L_y=-2y+2\lambda y=0$, 再与 $x^2+y^2-1=0$ 联立，得 $\begin{cases}1-2x+2\lambda x=0,\\ -2y+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2-1=0\end{cases}$ 的解 $\lambda=\frac{1}{2}, x=1, y=0$, 或 $\lambda=\frac{3}{2}, x=-1, y=0$, 故所求的最小值为 -2.

6. 求曲线 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ xy=1\end{cases}$ 上到 xOy 坐标面距离最短的点.

解 等价于求 $z=x^2+y^2$ 在条件 $xy=1$ 下取最小值时的点. 由 $xy=1$ 得 $y=\frac{1}{x}$, 从而 $z=x^2+y^2=x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$, 当且仅当 $x=\pm1, y=\pm1$ 时取等号. 故所求的点为 $(1,1,2),(-1,-1,2)$.

7. 求内接于椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 且棱平行坐标轴的体积最大的长方体.

解 设所求长方体的一个顶点坐标为 (x,y,z), 其中 $x>0, y>0, z>0$, 故长方体的体积为 $V=2x\cdot 2y\cdot 2z=8xyz$, 设 $L(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$, 则令 $L_x=8yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0, L_y=8xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0, L_z=8xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0$, 再与 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ 联立，得 $\begin{cases}8yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ 8xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ 8xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\end{cases}$ 的解 $\lambda=-\frac{4\sqrt{3}}{3}abc, x=\frac{\sqrt{3}}{3}a, y=\frac{\sqrt{3}}{3}b, z=\frac{\sqrt{3}}{3}c$, 故所求的最大值为 $\frac{8\sqrt{3}}{9}abc$.

8. 求周长为 $2p$ 的三角形的最大面积.

解　设三边长为 x,y,z, 则 $x+y+z=2p$, 三角形的面积为 $S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$. 由于 S 与 S^2 同取最大值，故可求 $S^2=p(p-x)(p-y)(p-z)$ 在条件 $x+y+z=2p$ 下的最大值. 设 $L(x,y,z,\lambda)=p(p-x)(p-y)(p-z)+\lambda(x+y+z-2p)$, 则令 $L_x=-p(p-y)(p-z)+\lambda=0, L_y=-p(p-x)(p-z)+\lambda=0, L_z=-p(p-x)(p-y)+\lambda=0$, 再与 $x+y+z-2p=0$ 联立，得 $\begin{cases} -p(p-y)(p-z)+\lambda=0, \\ -p(p-x)(p-z)+\lambda=0, \\ -p(p-x)(p-y)+\lambda=0, \\ x+y+z-2p=0 \end{cases}$ 的解 $\lambda=\frac{p^3}{9}, x=\frac{2p}{3}, y=\frac{2p}{3}, z=\frac{2p}{3}$, 故所求 S^2 的最大值为 $\frac{p^4}{27}$, 从而所求三角形的最大面积为 $\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$.

7　第八章习题课

1. 求偏导数：

(1) $z=\sqrt{\ln(xy)}$;

(2) $u=\arctan(x-y)^z$.

解　(1) $z_x=\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{\ln(xy)})=\frac{1}{2x\sqrt{\ln xy}}, z_y=\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{\ln(xy)})=\frac{1}{2y\sqrt{\ln xy}}$.

(2) $z_x=\frac{\partial}{\partial x}(\arctan(x-y)^z)=z\frac{(x-y)^{z-1}}{(x-y)^{2z}+1}, z_y=\frac{\partial}{\partial y}(\arctan(x-y)^z)=-z\frac{(x-y)^{z-1}}{(x-y)^{2z}+1}$.

2. 已知 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$, 求 dz.

解　$z_x=\frac{\partial}{\partial x}((x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}})=e^{-\arctan\frac{1}{x}y}(2x+y)$,
$z_y=\frac{\partial}{\partial y}((x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}})=-e^{-\arctan\frac{1}{x}y}(x-2y), dz=z_xdx+z_ydy=e^{-\arctan\frac{1}{x}y}((2x+y)dx-(x-2y)dy)$.

3. 设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$, 其中 f,φ 具有 2 阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y)$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=-\frac{x}{x^2}f'(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{y}{x}\cdot xf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)=\varphi'(x+y)+yf''(xy)+y\varphi''(x+y)$.

4. 设 $y=f(x,z)$, 而 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定，其中 f,F 一阶连续可导，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $y=f(x,z(x,y)), \frac{dy}{dx}=f_x+f_z\cdot(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx})=f_x+f_z\cdot(-\frac{F_x}{F_z}-\frac{F_y}{F_z}\frac{dy}{dx})$, 解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{f_xF_z-f_zF_x}{F_z+f_zF_y}$.

5. 设 $u=f(x,xy,xyz), f(x,y,z)$ 二阶可导，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3', \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x})=xf_{12}''+xzf_{13}''+f_2'+xyf_{22}''+xyzf_{23}''+zf_3'+xyzf_{32}''+xyz^2f_{33}''$.
$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial x})=xyf_{13}''+xy^2f_{23}''+yf_3'+xy^2zf_{33}''$.

6. 设 $u=x^2-xy+y^2, \overrightarrow{l}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$ 及点 $P_0(1,1)$,(1) 试求 $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}$;(2) 若 $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}$ 在 P_0 处取最大值，求 α.

解 (1)$u_x=2x-y, u_y=-x+2y, \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}|_{(1,1)}=u_x|_{(1,1)}\cos\alpha+u_y|_{(1,1)}\sin\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$;

(2) 因为 $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{l}}$ 在 P_0 处取最大值,故最大值即是样梯度的模 $|\mathrm{grad}\,u||_{(1,1)}=\left|\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right|=\sqrt{2}$, 即 $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}$, 从而 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

7. 设 $z=z(x,y)$ 满足方程 $2z-e^z+2xy=3$，且 $z(1,2)=0$, 求 $dz|_{(1,2)}$.

解 因为 $2z_x-e^zz_x+2y=0, 2z_y-e^zz_y+2x=0$, 从而 $z_x=\frac{2y}{e^z-2}, z_y=\frac{2x}{e^z-2}, z_x|_{(1,2)}=-4, z_y|_{(1,2)}=-2$, 故 $dz|_{(1,2)}=z_x|_{(1,2)}dx+z_y|_{(1,2)}dy=-4dx-2dy$.

8. 证明：锥面 $z=1+\sqrt{x^2+y^2}$ 上任一点的切平面都经过其顶点.

解 令 $F(x,y,z)=1+\sqrt{x^2+y^2}-z$, 则 $F_x=\frac{\partial}{\partial x}(1+\sqrt{x^2+y^2}-z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, F_y=\frac{\partial}{\partial y}(1+\sqrt{x^2+y^2}-z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, F_z=\frac{\partial}{\partial z}(1+\sqrt{x^2+y^2}-z)=-1$, 对于锥面上的任一点 $P(x_0,y_0,z_0)$, 切平面方程为 $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)-(z-z_0)=0$, 通过锥面顶点 $(0,0,1)$.

9. 求周长为定值 $2p$ 的三角形，使它绕自己的一边旋转所产生的旋转体体积最大者.

解　设三角形的三边长为 a,b,c,m 不妨设绕 c 边旋转产生的旋转体体积为最大，则体积 $V=\frac{1}{3}\pi h^2 c$, 其中 h 是 c 边上的高，由海伦公式有 $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{2}ch$, 从而 $h=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. 于是 $V=\frac{4\pi p(p-a)(p-b)(p-c)}{3c}$, 求在条件 $a+b+c=2p$ 下的极值. 设 $L(a,b,c,\lambda)=\frac{4\pi p(p-a)(p-b)(p-c)}{3c}+\lambda(a+b+c-2p)$,
令 $L_a=-\frac{4\pi p((p-b)(p-c)}{3c}+\lambda=0, L_b=-\frac{4\pi p((p-a)(p-c)}{3c}+\lambda=0, L_c=-\frac{4\pi p^2((p-a)(p-b)}{3c^2}+\lambda=0$, 再与 $x+y+z-2p=0$ 联立，得 $\begin{cases}-\frac{4\pi p((p-b)(p-c)}{3c}+\lambda=0,\\ -\frac{4\pi p((p-a)(p-c)}{3c}+\lambda=0,\\ -\frac{4\pi p^2((p-a)(p-b)}{3c^2}+\lambda=0,\\ x+y+z-2p=0\end{cases}$
的解 $\lambda=\frac{\pi p^2}{6}, a=b=\frac{3p}{4}, c=\frac{p}{2}$, 故所求 V 的最大值为 $\frac{\pi p^3}{12}$.

8　二重积分的概念与性质、二重积分的计算法 (1)

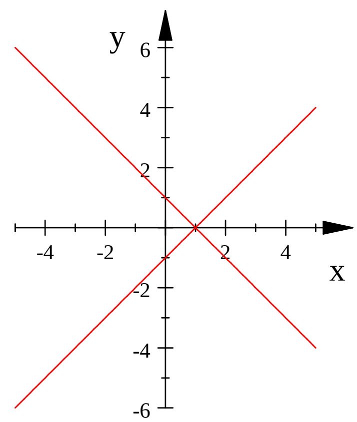
1. 利用二重积分的几何意义计算：

(1) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}d\sigma$;

解　即求球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的上半球的体积：$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=\frac{2}{3}\pi a^3$.

(2) D 由 $x+y=1, x-y=1, x=0$ 所围成，求 $\displaystyle\iint\limits_{D} y d\sigma$.

解　$$\iint\limits_{D} y d\sigma=\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} y dy=\frac{1}{2}\int_0^1((1-x)^2-(x-1)^2)dx=0.$$



2. 利用估值定理估计下列积分的值：

(1) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2+4y^2+1)dxdy$;

解 因为 $x^2+y^2\leqslant 1$，故 $1\leqslant x^2+4y^2+1\leqslant 3y^2+2\leqslant 5$，从而 $\pi\leqslant \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2+4y^2+1)dxdy\leqslant 5\pi$.

(2) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy(x^2+y^2)dxdy$.

解 因为 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，故 $0\leqslant xy(x^2+y^2)\leqslant 2$，从而 $0\leqslant \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy(x^2+y^2)dxdy\leqslant 2$.

3. 比较下列积分的大小：

(1) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} (x^2+y^2)dxdy$, $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} (x^3+y^3)dxdy$;

解 因为 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，故 $x^2\geqslant x^3, y^2\geqslant y^3$，从而 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} (x^2+$

$y^2)dxdy > \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} (x^3+y^3)dxdy.$

(2) $\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy, \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy, f(x,y)>0, D_1\subset D_2.$

解　因为 $f(x,y)>0, D_1\subset D_2$, 故 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy < \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$

4. 计算：

(1) $\iint\limits_{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1} (x^2+4y^2+1)d\sigma;$

解　$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}(x^2+4y^2+1)dy = \int_{-1}^{1}(2x^2+\frac{14}{3})dx = \frac{32}{3}.$

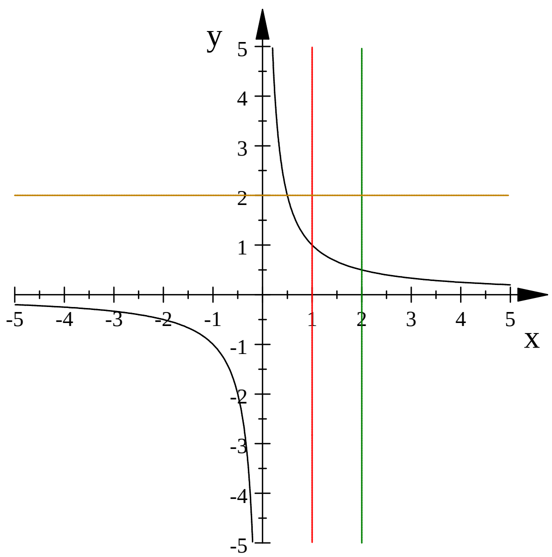
(2) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant \pi\\0\leqslant y\leqslant x}} x\cos(x+y)d\sigma.$

解　$\int_0^{\pi}dx\int_0^{x}x\cos(x+y)dy = \int_0^{\pi}(x\sin 2x - x\sin x)dx = -\frac{3}{2}\pi.$

5. 画出积分区域，并计算：

(1) $\iint\limits_{D} ye^{xy}dxdy$, 其中 D 由 $xy=1, x=1, x=2, y=2$ 所围成.

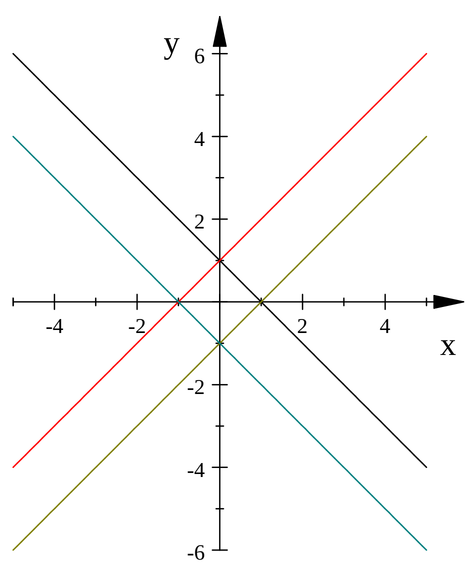
解　$xy=1, x=1, x=2, y=2$



$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 ye^{xy}dy = \int_1^2 e^{2x}\frac{2x-1}{x^2}dx = \frac{1}{2}e^4 - e^2.$

(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, 其中 $D = \{(x,y) | \, |x|+|y| \leqslant 1\}$.

解　因为 $|x|+|y| \leqslant 1$, 故 $y = 1-x, y = 1+x, y = -1+x, y = -1-x$



6. 交换积分次序：

(1) $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx$;

解

(2) $\int_0^1 dy \int_y^{y^2} f(x,y)dx$;

解

(3) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)dx$.

解

9 二重积分的计算法 (1)-续,(2)

1. 画出下列积分区域 D, 并将化为极坐标系下的二次积分：

(1) $D=\{(x,y)|a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2, 0<a<b\}$;

(2) $D=\{(x,y)|2x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4x\}$.

2. 将下列二次积分并化为极坐标形式，并计算：

(1) $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)dy$;

(2) $\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} xydy$.

3. 利用极坐标计算：

(1) $\displaystyle\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} \ln(x^2+y^2)dxdy$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4x} (x+y)dxdy$.

4. 计算二重积分：

(1) $\displaystyle\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma, D$ 是由 $x=-\sqrt{1-y^2}$, 直线 $y=-1, y=1, x=-2$ 围成.

(2) $\iint\limits_{D}\frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$, 其中 D 为 $x^2+y^2\leqslant 1, x+y\leqslant 1$.

5. 求圆锥体 $z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截下部分的体积.

6. 用二重积分表示由三个坐标平面及 $x+2y+3z=6$ 所围立体的体积，并计算之.

10 三重积分 (1),(2)

1. 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分，其中积分区域 Ω 分别为：

   (1) 由双曲抛物面 $xy=2z$ 及平面 $x+y-1=0, z=0$ 所围成的闭区域；

   (2) 由曲面 $z=2x^2+3y^2$ 及 $z=3-x^2$ 所围成的闭区域.

2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3dxdydz$, 其中 Ω 为 $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d, l\leqslant z\leqslant m$.

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(2+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四面体.

4. 利用三重积分计算由曲面 $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的体积.

11 三重积分 (2)-续

1. 利用柱面坐标计算下列三重积分：

   (1) $\iiint\limits_{\Omega}zdv$, 其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$ 及 $2z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=8$ 所围成的闭区域.

2. 利用球面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=2$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}zdv$, 其中闭区域 Ω 是由不等式 $x^2+y^2+(z-2a)^2\leqslant 4a^2, x^2+y^2\leqslant z^2$ 所确定.

3. 利用三重积分计算由曲面 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$ 所围成的立体的体积.

12　重积分的应用、第九章习题课 (1)

1. 求底圆半径相等的两个柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+y^2=R^2$ 所围成立体的表面积.

2. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 内部的那部分面积.

3. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_{D}(x^2-y^2)d\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant \sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi\}$;

(2) $\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=ax$ 所围成的闭区域；

(3) $\iint\limits_{D}(x^2+4x-8y+6)d\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant R^2\}$.

13 第九章习题课 (2)

1. 交换下列二次积分的积分次序：

   (1) $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$;

   (2) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$.

2. 将 $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy$ 化为极坐标形式.

3. 计算 $\iint\limits_D xe^{\cos xy}\sin xydxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 1\}$.

4. 求曲面 $az=xy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内那部分的面积.

5. 设 $f(x)$ 可微，且 $f(0)=0$, 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^3}\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

6. 计算下列三重积分：

   (1) $\iiint\limits_\Omega x^2dxdydz$, 其中 Ω 是 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rx(R>0)$ 的公共部分；

   (2) $\iiint\limits_\Omega \frac{x\sin(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz$, 其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的闭区域；

   (3) $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz$, 其中 Ω 是由曲面 $z^2=9(x^2+y^2)$ 及平面 $z=3$ 所围成的闭区域.

14 对弧长的曲线积分、对坐标的曲线积分 (1)

1. 计算下列对弧长的曲线积分：

(1) $\oint\limits_L (x^2+y^2)^n ds$, 其中 L 为 $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

(2) $\oint\limits_L x^2 ds$, 其中 L 为由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y+z=0$ 所表示的圆的一周;

(3) $\int\limits_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$, 其中 Γ 为曲线 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2π 的一段弧;

(4) $\oint\limits_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}) ds$, 其中 L 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

2. 设 L 为双钮线：$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \quad (a>0)$, 求 $\int\limits_\Gamma |y|\,ds$.

15 对坐标的曲线积分 (2),(3)、格林公式及其应用 (1)

1. 计算下列对坐标的曲线积分：

(1) $\oint\limits_L xyds$, 其中 L 为 $(x-R)^2+y^2=R^2 \quad (R>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的逆时针方向绕行的整个边界；

(2) $\oint\limits_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 为逆时针方向绕行的圆周 $x^2+y^2=R^2$;

(3) $\int\limits_\Gamma 2xdx+3ydy+(x-y+2)dz$, 其中 Γ 为从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线；

(4) $\int\limits_\Gamma (x^3-2xy^2)dx+(2y^2-xy)dy$, 其中 L 为 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

2. 将对坐标的曲线积分 $\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 化为对弧长的曲线积分，其中 L 为：

(1) 在 xOy 平面内从点 $(0,0)$ 到点 $(1,\sqrt{3})$ 的直线段.

(2) 沿 $x^2+y^2=2x$ 的上半部分从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$.

3. 利用曲线积分计算星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所围成的图形的面积.

4. 利用格林公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint\limits_L (x-2y+4)dx+(3x+5y-7)dy$, 其中 L 为三顶点分别为 $(0,0),(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界；

(2) $\oint\limits_L \frac{ydx-xdy}{4(x^2+y^2)}$, 其中 L 为 $(x-2)^2+y^2=9$, 且为逆时针方向.

16　格林公式及其应用 (2),(3)

一、 验证下列曲线积分与路径无关，并求积分值：

1. $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$.
2. $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{ydx-xdy}{x^2}$ 沿在右半平面的路线.

二、 利用格林公式计算曲线积分 $\int\limits_L(\sin y-y)dx+(x\cos y-1)dy$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=2x$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段弧.

三、 验证下列 $P(x,ydx+Q(x,y)dy$ 是一函数 $U(x,y)$ 的全微分，并求这样的一个 $U(x,y)$：

1. $(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$;
2. $(2x+\sin y)dx+x\cos ydy$.

四、 在过点 $O(0,0)$ 与 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x\quad(a>0)$ 中，求一条曲线 L, 使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int\limits_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$ 的最小值.

五、 求可微函数 $f(x)$, 使关系式 $\oint\limits_L f(x)(ydx-xdy)=0$ 成立，其中 L 为与 y 轴不相交的任何闭曲线.

17　第十章习题课—曲线积分及格林公式

一、 计算 $\oint\limits_L (x+y)ds$, 其中 L 为连续点 $(0,0),(1,0),(0,1)$ 的闭折线.

二、 计算 $\oint\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$, 直线 $y=x$ 和 $y=0$ 在第一象限内围成扇形的边界.

三、 计算 $\int\limits_L xy^2dy-x^2ydx, L$ 是从 $A(1,0)$ 沿 $y=\sqrt{1-x^2}$ 到 $B(-1,0)$ 的圆弧.

四、 计算曲线积分 $I=\oint\limits_L \frac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$, 其中

(1) 为圆周 $x^2+y^2-2y=0$ 的正向；

(2) L 为椭圆 $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向.

五、 设曲线积分 $\int\limits_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 φ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$, 计算 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy$.

六、 设曲线 L 是正向圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=1, \varphi(x)$ 是连续的正函数，证明：$\oint\limits_L \frac{x}{\varphi(y)}dy-y\varphi(x)dx \geqslant 2\pi$.

18　对面积的曲面积分、对坐标的曲面积分 (1)

一、 计算下列对面积的曲面积分：

1. $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$, 其中 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z>0$;
2. $\iint\limits_{\Sigma}\frac{dS}{x^2+y^2}$, 其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被平面 $z=0, z=h$ 所截部分.
3. $\iint\limits_{\Sigma}xyzdS$, 其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.

二、 求面密度 $\rho=z$ 为的抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\quad(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量.

三、 如 Σ 是坐标平面 xOy 内的一个闭区域，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy$ 与二重积分有什么关系？

19 对坐标的曲面积分 (2),(3)、高斯公式 (1)

一、 计算下列对坐标的曲面积分：

1. $\iint\limits_{\Sigma}yzdzdx$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半部分并取外侧；
2. $\oiint\limits_{\Sigma}xyzdydz+yzdzdx+zxdxdy$, 其中 Σ 是由平面 $x=y=z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围的四面体表面并取外侧为正向.

二、 求流速场 $\overrightarrow{v}=x\overrightarrow{i}+y^2\overrightarrow{k}$ 穿过曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的立体表面的流量.

三、 试将对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$ 化为对面积的曲面积分，其中 Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧.

四、 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy$，其中 Σ 是 $x=0, x=a, y=0, y=a, z=0, z=a$ 所围正方体表面的外侧.

20　第十章习题课—曲面积分及高斯公式

一、　计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}dydz+\frac{1}{y}dzdx+\frac{1}{z}dxdy$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

二、　设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，求曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}zdxdy$.

三、　计算 $\iint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy, \Sigma$ 为 $z^2=x^2+y^2\quad(0\leqslant z\leqslant h)$ 的下侧.

四、　求曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)ds, \Sigma$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的区域曲面.

五、　利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$, 其中 Σ 为介于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 9$ 的整个表面的外侧.

六、　计算对坐标的曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy$, 其中 Σ 是平行六面体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b, 0\leqslant z\leqslant c$ 的表面并取外侧, $f(x), g(y), h(z)$ 为 Σ 上的连续函数.

21　常数项级数的概念和性质、常数项级数的审敛法 (1)

一、　根据级数收敛与发散的定义，判别下列级数的收敛性：

1. $\frac{1}{1\times 6}+\frac{1}{6\times 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

二、　判别下列级数的收敛性：

1. $\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\cdots+\frac{n+1}{n}$;
2. $\frac{8^2}{9}+\frac{8^3}{9^2}+\frac{8^4}{9^3}+\cdots+\frac{8^{n+1}}{9^n}+\cdots$;
3. $(\frac{1}{3}+\frac{1}{1})+(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{n})+\cdots$.

三、 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 1, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+2})$ 的和.

四、 求级数数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ 的和.

五、 判别下列级数的收敛性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{2+n^3}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\tan\frac{1}{3^n}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n} \quad (a>0)$.

22 常数项级数的审敛法 (2),(3)

一、 用比值审敛法判别下列级数的收敛性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\sin\frac{\pi}{2^n}$.

二、 用根值审敛法判别下列级数的收敛性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2n}{3n-1})^{\frac{n}{2}}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{e}{a_n})^n$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$.

三、　判别下列级数是否收敛？如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{2^n}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{2^{n^2}}{n!}$.

四、　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.

23　幂级数

一、　求下列幂级数的收敛域：

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n}}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^nx^n}{n}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n}$.

二、　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，讨论此级数在 $x=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ 处的收敛性.

三、　利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数：

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n-1}$.

四、 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

24 函数展开成幂级数

一、 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

1. $2+\cos^2 x$;
2. $(1+x)\ln(1+x)$;
3. $\sin(x+\frac{\pi}{4})$;
4. $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$.

二、 将下列函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求展开式成立的区间：

1. $\ln(a+x) \quad (a>0)$;
2. $\frac{1}{x(x+1)}$.

三、 将函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数，并求展开式成立的区间.

25 傅里叶级数 (1),(2)

一、 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π, 证明：$f(x)$ 的傅里叶系数为 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx, b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx \quad (n=0,1,2,\cdots)$.

二、 设周期 $f(x)$ 函数的周期为 2π, 且在 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)=x^2$, 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

三、 将周期为 2π 的函数 $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\leqslant x<0, \\ 1, & x=0, \\ 2x, & 0<x\leqslant\pi \end{cases}$ m 展开为傅里叶级数，并讨论其收敛情况.

四、 将下列函数展开为傅里叶级数：

1. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$;

2. $f(x)=\begin{cases} -\pi, & -\pi\leqslant x<0, \\ x, & 0\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$

26　傅里叶级数 (3)、一般周期函数的傅里叶级数

一、 将函数 $f(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}$ 在 $[0,\pi]$ 上分别展开为正弦级数和余弦级数.

二、 证明：当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)$.

三、 将下列各周期函数展开为傅里叶级数：

1. $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -3\leqslant x<0, \\ 1, & 0\leqslant x<3; \end{cases}$

2. $f(x)=x^2\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$, 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

四、 将函数 $f(x)=x-1\quad(0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开为周期为 4 的余弦函数.

27　第十一章习题课

一、 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$：

1. 若 $u_{n+1}>u_n, n=1,2,\cdots$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是否一定发散？

2. 若 $u_{n+1} < u_n, n = 1, 2, \cdots$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否一定收敛？

二、 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散，判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{1+a_n})^n$ 的敛散性.

三、 判别下列级数的收敛性：

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \cos\frac{\pi}{n})$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{2}}}{2^n}$.

四、 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性：

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\frac{n}{n+1}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(n\pi + \frac{\pi}{n})$.

五、 求下列幂级数的收敛性：

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{\sqrt{n}} x^n$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n-2^n}$.

六、 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n!}$ 的和.

七、 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

1. $(x+1)\arctan x$;
2. $\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

28 微分方程的基本概念、可分离变量的微分方程

一、 判别下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

1. $\frac{dy}{dx}=-y\cot\frac{x}{2}, y=\frac{1}{1-\cos x}$;
2. $y''=1+y^2, y=C_1-\ln\cos(x+C_2)$.

二、 确定下列各题的函数关系式中的参数，使函数满足所给条件的初始值：

1. $x^2-2y^2=C, y|_{x=0}=3$;
2. $y=C_1\cos x+C_2\sin x, y|_{x=\frac{\pi}{2}}=1, y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=2$.

三、 设曲线在点 (x,y) 处切线的斜率等于该点纵坐标的立方，写出该曲线满足的微分方程.

四、 求下列微分方程的通解：

1. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$;
2. $(1+x^2)y'=1+y^2$;
3. $\sec^2 x\tan y dx+\sec^2 y\tan x dy=0$;
4. $(1+x)dy+(1-2e^{-y})dx=0$.

五、 求下列微分方程满足初始条件的特解：

1. $(1+e^x)yy'=e^x, y|_{x=1}=1$;
2. $(1+x^2)y'=\arctan x, y|_{x=0}=0$.

六、 一曲线过点 $(2,3)$, 它在两坐标轴间的任一切线段均被切点平分，求此曲线方程.

29 齐次方程、一阶线性微分方程 (1)

一、 求下列齐次方程的通解：

1. $xy' - x\sin\frac{y}{x} = y$;
2. $(x + y\cos\frac{y}{x})dx - x\cos\frac{y}{x}dy = 0$.

二、 求下列齐次方程满足所给初始条件的特解：

1. $xy\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, y|_{x=e} = 2e$;
2. $x^2dy + (xy - y^2dx) = 0, y|_{x=1} = 1$.

三、 设有连结点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\widehat{OA}$, 对于弧 $\widehat{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$, 曲线弧 $\widehat{OP}$ 与直线段 $\overline{OP}$ 所围图形的面积为 x^2, 求曲线弧 $\widehat{OA}$ 的方程.

四、 求下列微分方程的通解：

1. $xy' + y = xe^x$;
2. $y' + y\tan x = \sin 2x$;
3. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$;
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^3e^y}$.

五、 求下列微分方程满足初始条件的特解：

1. $y'\cos y + \sin y = x, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$;
2. $(2x+1)e^y y' + 2e^y = 4, y|_{x=0} = 0$.

30 一阶线性微分方程 (2)、全微分方程

一、 已知 $f(\pi)=1$, 曲线积分 $\int_L (\sin x - f(x))\frac{y}{x}dx + f(x)dy$ 与路径无关，求函数 $f(x)$.

二、 质量为 M_0 克的雨滴在下落过程中，由于不断蒸发，使雨滴的质量以每秒 m 克的速率减少，且所受空气阻力和下落速度成正比. 若开始下落时雨滴速度为零，试求雨滴下落的速度与时间的关系.

三、 求下列伯努利方程的通解：

1. $y' + \frac{1}{x}y = x^2y^3$;
2. $xy' + y - y^2\ln x = 0$.

四、 求下列方程的通解：

1. $(\cos(x+y^2)+3y)dx + (2y\cos(x+y^2)+3x)dy = 0$;
2. $(x\cos y + \cos x)y' - y\sin x + \sin y = 0$;
3. $e^ydx + (xe^y - 2y)dy = 0$.

五、 利用观察法求出下列方程的积分因子，并求其特解：

1. $ydx - xdy + y^2xdx = 0$;
2. $y(2xy+e^x)dx - e^xdy = 0$.

六、 设 $(xy(x+y) - f(x))dx + (f(x)+x^2y)dy = 0$ 为全微分方程，其中函数 $f(x)$ 连续可微，$f(0)=0$, 试求函数 $f(x)$, 并求该方程的通解.

31　可降阶的高阶微分方程

一、　还应下列各微分方程的通解：

1. $y'' = x\sin x$;
2. $y'' - y' = x$;
3. $yy'' + (y')^2 = y'$;
4. $y''(1+e^x) + y' = 0$.

二、　求下列各微分方程满足所给初始条件的特解：

1. $2y'' = \sin 2y, y|_{x=0} = \frac{\pi}{2}, y'|_{x=0} = 1$;
2. $xy'' - y'\ln y' + y'\ln x = 0, y|_{x=1} = 2, y'|_{x=1} = e^2$.

三、　设函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 内二阶连续可导，且 $f(1) = 2$, 又 $f'(x) - \frac{f(x)}{x} - \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 0$, 求 $f(x)$.

四、　一物体质量为 m, 以初速度 v_0 从一斜面上滑下，若斜面的倾角为 α, 磨擦系数为 μ, 试求物体在斜面上滑动的距离与时间的函数关系.

32　高阶线性微分方程

一、　讲座函数组 $y_1 = e^{x^2 + \frac{1}{x^2}}, y_2 = e^{x^2 - \frac{1}{x^2}}, y_3 = e^{(x-\frac{1}{2})^2}$ 的线性相关性.

二、　证明：下列函数是微分方程的通解：

1. $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$　(C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ 的通解.
2. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x$　(C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $2y'' + y' - y = 2e^x$ 的通解.

三、　设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是某个二阶非齐次线性微分方程的三个解，且 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 线性无关，证明：微分方程的通解为 $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + (1 - c_1 - c_2) y_3(x)$.

四、　试求以 $y = \frac{1}{x}(C_1 e^x + C_2 e^{-x}) + \frac{e^x}{2}$ $(C_1, C_2$ 是任意常数) 为通解的二阶线性微分方程.

五、　利用代换 $y = \frac{u}{\cos x}$ 化简方程 $y'' \cos x - 2y' \sin x + 3y \cos x = e^x$.

33　常系数线性微分方程

一、　设 $y = e^{2x}$ 是微分方程 $y'' + py' + 6y = 0$ 的一个特解，求此方程的通解.

二、　求下列微分方程的通解：

1. $y'' - 5y' = 0$;
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$;
3. $y'' + 4y' + y = 0$;
4. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

三、　求下列微分方程的通解：

1. $y''' - 6y'' + 3y' + 10y = 0$;
2. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$.

四、　求下列微分方程满足初始条件的特解：

1. $y'' + 2y' + 10y = 0, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$;
2. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 3x = 0, x|_{t=0} = 0, x'|_{t=0} = 1$

34 常数非齐次线性微分方程

一、 求下列方程的通解：

1. $y''+2y'+y=xe^x$;
2. $y''-7y'+6y=\sin x$;
3. $y''-2y'+5y=e^x\sin x$;
4. $y''+y=x+\cos x$.

二、 设 k 为常数，试求 $y''-2ky'+k^2y=e^x$ 的通解.

三、 设 $f(x)=\sin x+\int_0^x f(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

四、 设二阶常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解为 $y^*=e^{2x}+(1+x)e^x$, 求常数 a,b,c 及该方程的通解.

五、 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=1$, 且 $(xy(x+y)-f(x)y)dx+(f'(x)+x^2y)dy=0$ 为一全微分方程，求 $f(x)$.

35 第十二章习题课

一、 已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,\frac{1}{2})$ 且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$, 求 $f(x)$.

二、 已知函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是比 Δx 更高阶的无穷小量，$y(0)=\pi$, 求 $y(1)$.

三、 求解下列微分方程：

1. $ydx+(x^2y-x)dy=0$, 满足 $y|_{x=1}=1$ 的特解；
2. $y''+y'=\frac{1}{1+e^x}$ 的通解.

四、 求 $y''+y'=x+\sin x$ 的通解.

五、 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求此微分方程.

六、 已知函数 $f(x)$ 可微，且对于任意的实数 x,y, 满足：$f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)$, 求此函数 $f(x)$.

七、 设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$, 且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合，求函数 $y=y(x)$.

36 期末考试模拟试卷

一、 填空题：(每小题 3 分，共 15 分)

1. $z=e^{xy}\tan\frac{y}{x}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$ __________.
2. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $u_{n+1}>u_n, n=1,2,\cdots$, 则的敛散性为 __________.
3. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=9, \int\limits_L (x^2+y^2)ds=$ __________.
4. $y''+3y'+2y=e^x$ 的特解形式为 __________.
5. 设空间区域 Ω 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=1$ 所围成，将三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 化为球面坐标第下的三次积分有 $I=$ __________.

二、 选择题：(每小题 3 分，共 15 分)

1. $y=Ce^{2x}$ (C 为任意常数) 是微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}-4y=0$ 的 ( )

   (A) 通解 (B) 特解

   (C) 不是解 (D) 是解，但既不是通解，也非特解
2. 设 $x_0=1$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^{n+1}$ 的收敛点，则在 $x=-\sqrt{5}$ 处级数 ( )

(A) 发散 (B) 绝对收敛 (C) 条件收敛 (D) 敛散性不能确定

3. 设 $z=\frac{1}{f(x+\frac{x}{y})}$, 其中 $f(u)$ 可导，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=($ $)$

(A) $\frac{1+\frac{1}{y}}{f^2(x+\frac{x}{y})}$ (B) $\frac{(1+\frac{1}{y})f'(x+\frac{x}{y})}{f^2(x+\frac{x}{y})}$ (C) $-\frac{1+\frac{1}{y}}{f^2(x+\frac{x}{y})}$ (D) $-\frac{(1+\frac{1}{y})f'(x+\frac{x}{y})}{f^2(x+\frac{x}{y})}$

4. 设 $\widehat{MN}$ 是从 $M(1,1)$ 沿圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 至点 $N(2+\sqrt{2},0)$ 的半圆周，则积分 $\int\limits_{\widehat{MN}} ydx+xdy=($ $)$

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

5. 两个圆柱体 $y^2+z^2\leqslant R^2, z^2+x^2\leqslant R^2$ 公共部分的表面积 S 等于 ( )

(A) $4\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dy$ (B) $16\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dy$

(C) $8\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dy$ (D) $4\int_0^R dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dy$

三、 计算题：(共 15 分)

1. (7 分) 设方程确定其中可微，求

2. (8 分) 修建一座容积为 $V\,\mathrm{m}^3$ 的形状为长方体的地下仓库，已知仓顶和墙壁每平方米的造价分别是地面每平方米造价的 2 倍和 3 倍，问如何设计长、宽、高，使它的造价最小.

四、 计算下列积分：(共 24 分)

1. (8 分)$\iint\limits_D xydxdy$, 其中 D 由 $0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$ 围成.

2. (8 分) 设 $\int\limits_L y^2dx+yf(x)dy$ 与积分路径无关，其中 $f(x)$ 连续可导，且 $f(0)=0$, 计算 $\int_{(0,3)}^{(2,4)} y^2dx+yf(x)dy$ 的值.

3. (8 分)$\oiint\limits_\Sigma (x^2+y^2)dS$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=4$ 所围成区域的整个边界曲面.

五、 求解下列问题：(共 15 分)

1. (7 分) 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的绝对收敛性或条件收敛性.
2. (8 分) 将函数 $\frac{1}{x^2}$ 展开为 $(x-2)$ 的幂级数，并求出收敛区间.

六、 求解下列问题：(共 16 分)

1. (8 分) 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 满足关系式：$\frac{u_n}{v_n}\geqslant\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散.
2. (8 分) 求微分方程 $xy'-y=x^2\ln x$ 的通解.

参考文献

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学. 北京：高等教育出版社，2002，第 5 版

[2] 汪光先 戴中寅 武震东. 高等数学习题课教程. 苏州：苏州大学出版社，2005，第 1 版

[3] 骆一舟. 高等数学辅导及习题精解. 陕西：陕西师范大学出版社，2004，第 1 版

[4] Darel W Hardy, Carol L Walker. Doing Mathematics with Scientific WorkPlace and Scientific Notebook. MacKichan Software,Inc. 2005

[5] Susan Bagby. Creating Documents with Scientific WorkPlace and Scientific Word. MacKichan Software,Inc. 2005