苏州大学理工类高等数学（课次练习）上册解答（2006 版）

苏州大学数学科学学院　丰世富　潘洪亮

2020 年 11 月 4 日

目录

[1]本文档利用 Scientific WorkPlce 5.5 内置的 MuPAD 或 Maple 进行数值计算、符号运算及绘图，并使用内置的 XeLaTeX 进行排版.

1 函数与映射

一、 指出下列函数是由哪些简单初等函数复合而成：

1. $y=\arcsin\frac{x^2-1}{2}$;

   解函数是由下列初等函数复合而成：$y=\arcsin u, u=\frac{v-1}{2}, v=x^2$.

2. $y=\ln\ln\ln x$.

   解函数是由下列初等函数复合而成：$y=\ln u, u=\ln v, v=\ln x$.

二、 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$, 求下列函数的定义域：

1. $f(x^2)$;

   解 $y=f(x^2)$ 可以看作为 $y=f(u)$ 与 $u=x^2$ 的复合函数，因 $u\in(0,1]$,
   故 $x^2\in(0,1]$, 即 $0<x^2\leqslant 1$，于是 $0<x\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant x<0$, 即所求的定义域为 $x\in[-1,0)\cup(0,1]$.

2. $f(\cos x)$;

   解 $y=f(\cos x)$ 可以看作为 $y=f(u)$ 与 $u=\cos x$ 的复合函数，因 $u\in(0,1]$, 故 $\cos x\in(0,1]$, 故 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, 即所求的定义域为 $\{x|2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$.

3. $f(ax)\quad(a>0)$.

   解 $y=f(ax)$ 可以看作为 $y=f(u)$ 与 $u=ax$ 的复合函数，因 $u\in(0,1]$, 故 $ax\in(0,1]$, 即 $0<ax\leqslant 1$, 又 $a>0$, 故 $0<x\leqslant\frac{1}{a}$, 即所求的定义域为 $(0,\frac{1}{a}]$.

三、 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}5x, & x<0,\\ -3x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$.

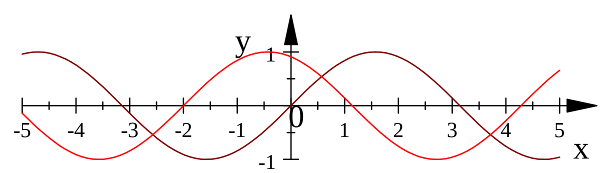
解 $x<0$ 时，$f(x)=2x<0, g(x)=5x<0$, 故 $f(g(x))=10x$ 及 $g(f(x))=10x; x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x\geqslant 0$，$g(x)=-3x\leqslant 0$, 故 $f(g(x))=-6x$ 及 $g(f(x))=-3x$. 于是 $f(g(x))=\begin{cases}10x, & x<0,\\ -6x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(f(x))=\begin{cases}10x, & x<0,\\ -3x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

四、 用 $f(x)=\sin x$ 的图形作出下列函数图形：

1. $y=f(x+2)$;

   解由 $f(x)=\sin x$ 向左平移 2 个单位得到 $y=f(x+2)$ 的图形.

   $f(x), f(x+2)$

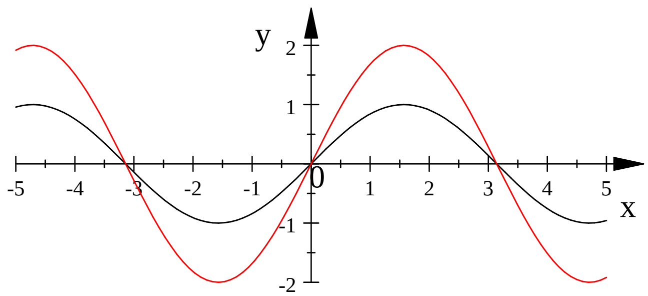


图形的平移变换

2. $y=2f(x)$;

   解由 $f(x)=\sin x$ 关于 y 轴放大到原来的 2 倍得到 $y=2f(x)$ 的图形.

   $f(x), 2f(x)$

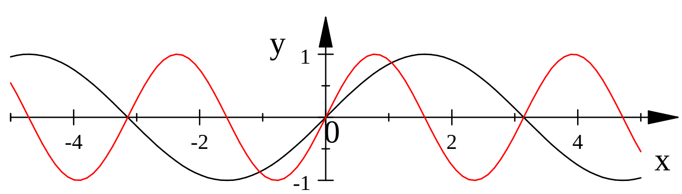


图形关于 y 轴的伸缩变换

3. $y=f(2x)$.

解由 $f(x)=\sin x$ 关于 x 轴方向放大到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍得到 $y=f(2x)$ 的图形.

$f(x), f(2x)$



图形关于 x 轴的伸缩变换

五、 已知 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$, 求 $f(\cos\frac{x}{2})$.

解用 $\pi-x$ 代 x, 得 $f(\sin\frac{\pi-x}{2})=1+\cos(\pi-x)$, 即 $f(\cos\frac{x}{2})=1-\cos x$.

六、 设定义在 $(-\infty,\infty)$ 的函数 $f(x)$ 严格递增，且有 $f(f(x))=f(x)$, 求 $f(x)$.

解因为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上严格递增，故对任意的 x, 如果 $f(x)>x$, 则 $f(x)=f(f(x))>f(x)$, 矛盾；如果 $f(x)<x$, 则 $f(x)=f(f(x))<f(x)$, 矛盾. 故 $f(x)=x$.

七、 证明：$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内有界.

证明因为 $x\in\mathbb{R},x^2\geqslant 0$, 故 $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}>0$. 又当 $|x|\geqslant 1$ 时，$1+x^4\geqslant 1+x^2, f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}\leqslant 1$; 当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}\leqslant 1+x^2<2$. 故 $f(x)<2$. 于是 $|f(x)|\leqslant 2$, 即 $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内有界.

2 数列与极限、函数的极限

一、 根据数列极限的定义证明：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$;

   证明　对于任意小的正数 $\varepsilon>0$, 由于 $|\frac{\sin n}{n}-0|=\frac{|\sin n|}{n}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$ 时，有 $n>\frac{1}{\varepsilon}$, 故取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1\in\mathbb{N}^*$, 则当 $n>N$ 时，必有 $n>N>\frac{1}{\varepsilon}$, 且 $|\frac{\sin n}{n}-0|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=\frac{1}{2}$;

   证明　因 $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{n+1}{2n}$, 对于任意小的正数 $\varepsilon>0$, 由于 $|\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2n}<\varepsilon$ 时，有 $n>\frac{1}{2\varepsilon}$, 故取 $N=[\frac{1}{2\varepsilon}]+1\in\mathbb{N}^*$, 则当 $n>N$ 时，必有 $n>N>\frac{1}{2\varepsilon}$, 且 $|\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2n}<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=\frac{1}{2}$.

二、 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\neq 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 反过来成立吗？如成立给出证明，如不成立举出反例.

证明　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\neq 0$，故对于任意小的正数 $\varepsilon>0$, 必存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时，有 $|x-a|<\varepsilon$, 从而 $||x_n|-|a||\leqslant|x-a|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

反过来不成立. 例如取 $x_n=(-1)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$, 但 $\{x_n\}$ 无极限.

三、 根据函数极限的定义证明：

1. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$;
   证明　对于任意小的正数 $\varepsilon>0$, 由于 $|(3x-1)-8|=3|x-3|<\varepsilon$ 时，有 $|x-3|<\frac{1}{3\varepsilon}$，故取 $\delta=\frac{1}{3\varepsilon}>0$, 当 $|x-3|<\delta$ 时，必有 $|(3x-1)-8|=3|x-3|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

2. ★ $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2-4}-x)=-2$.
   证明　考虑 $x\to+\infty$ 及 $x(\sqrt{x^2-4}-x)$，不妨设 $x>2$，由于 $|x(\sqrt{x^2-4}-x)-(-2)|=|x\sqrt{x^2-4}-(x^2-2)|=|\frac{4}{x\sqrt{x^2-4}+(x^2-2)}|$, 故当 $x^2-4>1$，即 $x>\sqrt{5}$ 时，$x\sqrt{x^2-4}+(x^2-2)>x\times 1+0=x$, 于是 $|x(\sqrt{x^2-4}-x)-(-2)|<\frac{4}{x}$, 故对于任意小的正数 $\varepsilon>0$, 当 $\frac{4}{x}<\varepsilon$ 时，有 $x>\frac{4}{\varepsilon}$. 取 $X=\max(\frac{4}{\varepsilon},\sqrt{5})>0$, 当 $x>X$ 时，有 $|x(\sqrt{x^2-4}-x)-(-2)|<\frac{4}{x}<\varepsilon$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2-4}-x)=-2$.

四、 设 $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x>1,\\ 2x, & x<1,\end{cases}$ 试求：

1. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$;
   解因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x-1)=2$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}2x=2$,
   故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$;
   解 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.
   解 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}2x=0$.

五、 设函数 $f(x)=\frac{3x+|x|}{5x-3|x|}$, 试求：

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

解因为 $f(x)=\frac{3x+|x|}{5x-3|x|}=\begin{cases}2, & x>0,\\ \frac{1}{4}, & x<0,\end{cases}$ 故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

解因为 $f(x)=\frac{3x+|x|}{5x-3|x|}=\begin{cases}2, & x>0,\\ \frac{1}{4}, & x<0,\end{cases}$ 故 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$;

解因为 $f(x)=\frac{3x+|x|}{5x-3|x|}=\begin{cases}2, & x>0,\\ \frac{1}{4}, & x<0,\end{cases}$ 故 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$.

4. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$;

解因为 $f(x)=\frac{3x+|x|}{5x-3|x|}=\begin{cases}2, & x>0,\\ \frac{1}{4}, & x<0,\end{cases}$ 故 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{4}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{1}{4}$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

3 无穷大与无穷小、极限运算法则

一、 下列函数在指定的变化趋势下是无穷小量还是无穷大量？

1. $\ln x \quad (x\to 1)$ 及 $(x\to 0^+)$;

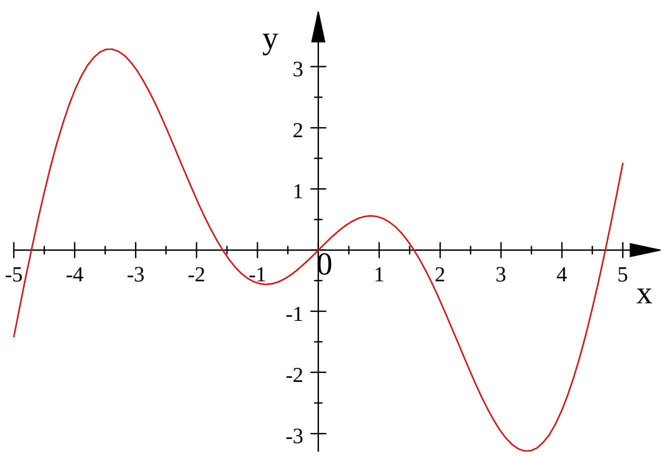
解因为 $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=\ln 1=0$, 故当 $x\to 1$ 时，$\ln x$ 是无穷小量；因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, 故当 $x\to 0^+$ 时，$\ln x$ 是无穷大量.

2. $x(\sin\frac{1}{x}+2) \quad (x\to 0)$

解因为 $\left|\sin\frac{1}{x}+2\right|\leqslant 3\lim\limits_{x\to 0} x=0$ 故 $\lim\limits_{x\to 0} x(\sin\frac{1}{x}+2)=0$，故当 $x\to 0$ 时，$x(\sin\frac{1}{x}+2)$ 是无穷小量.

二、 证明函数 $y=x\cos x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界，但当 $x\to+\infty$ 时，该函数不是无穷大量.

证明　函数 $y=x\cos x$ 的图形如下：



$y=x\cos x$ 变化趋势

取 $x_n=2n\pi\in(0,+\infty), n\in\mathbb{N}^*$, 此时 $f(x_n)=2n\pi$, 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=+\infty$,故 $f(x)$ 无界;又取 $y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{N}^*$ 时, $f(y_n)=0$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)=0$，于是 $n\to+\infty$ 时，$f(x)$ 不是无穷大量.

三、　计算下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$;

   解因为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^n}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}2-\frac{1}{2^n})=2.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}$;

   解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-1}{x^2-9}$;

   解因为 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-x-1}=\frac{0}{5}=0$, 故 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-1}{x^2-9}=\infty.$

4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$.

四、 计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}(2x-1)^5}{(3x+2)^{15}}$;

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}(2x-1)^5}{(3x+2)^{15}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^{10}(2-\frac{1}{x})^5}{(3+\frac{2}{x})^{15}}=\frac{2^5}{3^{15}}=\frac{32}{14\,348\,907}$.

2. $\lim\limits_{x\to1}(\frac{5}{1-x^5}-\frac{3}{1-x^3})$;

解 $\lim\limits_{x\to1}(\frac{5}{1-x^5}-\frac{3}{1-x^3})=\lim\limits_{x\to1}\frac{5(1-x^3)-3(1-x^5)}{(1-x^5)(1-x^3)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(4x+6x^2+3x^3+2\right)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$.

五、 已知 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$, 求常数 a 和 b.

解因为 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=\lim\limits_{x\to2}(\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}(x^2-x-2))=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}\lim\limits_{x\to2}(x^2-x-2)=2\times0=0$, 另一方面，$\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=2a+b+4$, 故 $2a+b+4=0$，即 $b=-4-2a$, 故 $\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\frac{x^2+ax-4-2a}{x^2-x-2}=\frac{(x-2)(x+2)+a(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{x+2+a}{x+1}$，于是 $2=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x+2+a}{x+1}=\frac{4+a}{3}$, 即 $a=2$, 从而 $b=-8$.

4 极限存在准则、无穷小比较

一、 计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to0}(1-3\sin x)^{2\csc x}$;

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1-3\sin x)^{2\csc x}=\lim\limits_{x\to 0}((1-3\sin x)^{\frac{1}{-3\sin x}})^{-6}=(\lim\limits_{x\to 0}(1-3\sin x)^{\frac{1}{-3\sin x}})^{-6}$
$=e^{-6}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}$;

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin 3x}{3x}+x\sin\frac{1}{x}}{1+\cos x}=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}+\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)}=\frac{3\times 1+0}{1+1}=$
$\frac{3}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin(\frac{\pi}{6}-x)\tan 2x$;

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin(\frac{\pi}{6}-x)\tan 2x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(\frac{\pi}{6}-x)}{\frac{\pi}{6}-x}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\frac{\pi}{6}-x)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\tan 2x=0.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-1})^x$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-1})^x=\lim\limits_{x\to\infty}((1+\frac{2}{x-1})^{\frac{x-1}{2}})^2\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x-1})=e^2.$

二、 利用夹逼准则证明：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n})=1$.

证明 因为 $n\frac{n}{n^2+n}<n(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n})<n\frac{n}{n^2+1}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}n\frac{n}{n^2+n}=$
$\lim\limits_{n\to\infty}n\frac{n}{n^2+1}$
$=1$，从而由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n})=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}x[\frac{1}{x}]=1$.

证明 因为 $[\frac{1}{x}]\leqslant\frac{1}{x}<[\frac{1}{x}]+1$, 又 $x>0$, 故 $1-x<x[\frac{1}{x}]\leqslant 1$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$, 故由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to 0^+}x[\frac{1}{x}]=1$.

三、 设 $x_1=a>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})\quad(n=1,2,3,\cdots)$, 利用单调有界准则证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

证明 由 $x_1=a>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})\quad(n=1,2,3,\cdots)$ 得 $x_n>0$. 而 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})\geqslant\frac{1}{2}2\sqrt{x_n\cdot\frac{2}{x_n}}=\sqrt{2}$，即数列 $\{x_n\}$ 有下界. 又因为 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})-x_n=\frac{2-x_n^2}{2x_n}<0(n\geqslant 2)$，即从第二项开始，数列 $\{x_n\}$ 单调

下降，利用单调有界准则可知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设为 b. 于是 $b>0, b=\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})=\frac{1}{2}(b+\frac{2}{b})$, 从而 $b=\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}$(舍去).

四、 确定 α 的值，使 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}-\frac{1}{4}x^{\alpha}(x\to 0)$.

解因为 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}=\frac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\frac{\sin x(1-\cos x)}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cos x}$
$=\frac{\tan x(1-\cos x)}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}, \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})}{\frac{1}{4}x^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\frac{1}{4}x^{\alpha}(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{4}x^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to 0}x^{3-\alpha}=1$（取 $\alpha=3$ 时），故 $\alpha=3$.

$(\tan x\sim x, 1-\cos x\sim x, x\to 0)$.

5 函数的连续性与间断点、连续函数的运算及初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质

一、 判断下列函数在指定处的间断点类型，如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使其连续.

1. $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}, x=1, x=2$;
   解因为 $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x+1}{x-2}$, 所以 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2, \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty$，故 $x=1$ 是可去间断点，补充定义为 $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-2$, 则
   $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\begin{cases}\frac{x+1}{x-2}, & x\neq 1, x\neq 2,\\ -2, & x=1.\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，$x=2$ 是无穷间断点.

2. $y=\frac{x}{\tan x}, x=k\pi, x=k\pi+\frac{\pi}{2}\quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.
   解 (1) $x=k\pi$ 时，
   $k=0$ 时，$x=0, \lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$, 故 $x=0$ 是可去间断点，补充定义 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$;

$k \neq 0$ 时，$\lim\limits_{x \to k\pi} \frac{x}{\tan x} = \infty$，$x = k\pi$ 是无穷间断点.

(2) $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时，$\lim\limits_{x \to k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = \lim\limits_{x \to k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sin x} = 0$, 故 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 是可去间断点，补充定义 $f(k\pi + \frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{x \to k\pi + \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$.

二、 讨论函数 $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ 的连续性，若有间断点试判断其类型.

解因为 $\lim\limits_{n \to \infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ +\infty, & |x| > 1, \end{cases}$ 故 $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$

$x = \pm 1$ 是跳跃间断点.

三、 求下列极限：

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{e^{x^3} - 1}$;

   解 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{e^{x^3} - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})(e^{x^3} - 1)}$

   $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})(e^{x^3} - 1)} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{4}$.

   $(\tan x \sim x, \sin x \sim x, e^{x^3} - 1 \sim x^3, x \to 0)$.

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$.

   解 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1} = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{3^y - 1}{3^y + 1} = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{3^y}}{1 + \frac{1}{3^y}} = 1$.

四、 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sqrt{1 - \cos x}}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ b, & x = 0, \\ \frac{1}{x}(\ln x - \ln(x^2 + x)), & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 问 a, b 为何值时，

$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内连续.

解 $f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin ax}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin ax}{\sqrt{2}(-\sin \frac{x}{2})} = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ -\sqrt{2}a, & a \neq 0, \end{cases}$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}(\ln x-\ln(x^2+x))=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\ln\frac{1}{e}=-1.$

$f(0)=b$, 由 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$ 得 $-\sqrt{2}a=-1=b$, 即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2},b=-1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；又因为 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}0)$ 及 $(0\frac{\pi}{2})$ 是初等函数，显然连续，故 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内连续.

五、 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证明 设 $f(x)=x^5-3x-1$, 因 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)=-3<0,f(2)=25>0,f(1)f(3)<0$, 由零点存在定理知，$f(x)=x^5-3x-1$ 在 $(1,3)$ 内有一个零点，即方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

6 第一章习题课

一、 计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$;

   解 $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-(x+2)}{(x^2+x+1)}=-1.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;

   解 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$;

   解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})x(1-\cos x)}$
   $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})x\cos x}=\frac{1}{2}.$

4. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

   解 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{(1+\sqrt{\cos x})(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(1+\sqrt{\cos x})2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(\frac{x}{2})^2}{(\frac{\sqrt{x}}{2})^2}=0.$

$(\sin^2\frac{x}{2}\sim(\frac{x}{2})^2, \sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\sim(\frac{\sqrt{x}}{2})^2, x\to 0)$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}3^{\arctan x}$;

解因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}3^{\arctan x}=3^{\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x}=3^{-\frac{\pi}{2}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{\arctan x}=3^{\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x}=3^{\frac{\pi}{2}}$, 故 $\lim\limits_{x\to\infty}3^{\arctan x}$ 不存在.

6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+4x+6}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+4x+6}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+(\frac{\sin x}{x})^2}}=\frac{-2+1}{-1}=1$.

二、 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3+1}{x^2+1}-ax-b)=1$, 求常数 a,b.

解 $1=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3+1}{x^2+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3+1}{x^2+1}-ax)-b=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^3+1-ax}{x^2+1}-b$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x+\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}-b$, 故 $a=1, b=-1$.

三、 设 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{5}}-1$ 与 $\ln\cos x$ 是等价无穷小，求常数 a 的值.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{5}}-1}{\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5}ax^2}{\ln(1+(\cos x-1))}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5}ax^2}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5}ax^2}{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{2}{5}a=1$,
$a=-\frac{5}{2}$.

$((1+ax^2)^{\frac{1}{5}}-1\sim\frac{1}{5}ax^2, \ln(1+(\cos x-1))\sim\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}, x\to 0)$.

四、 设 $x\to 0$ 时，$(1+x^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $1-\cos ax$ 是等价无穷小，求常数 a 的值.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}-1}{1-\cos ax}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{(ax)^2}{2}}=\frac{1}{2a^2}=1, a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

五、 设 $a<b<c$, 证明：方程 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ 在 (a,b) 与 (b,c) 内各至少有一实根.

证明 因为 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=\frac{(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, 设 $f(x)=(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 及 $[b,c]$ 上连续. 由于

$f(a)f(b)=(a-b)(a-c)(b-c)(b-a)=-(a-b)^2(c-a)(c-b)<0,$

$f(b)f(c)=(b-c)(b-a)(c-a)(c-b)=-(b-c)^2(b-a)(c-a)<0,$

故 $f(x)=0$ 在 (a,b) 与 (b,c) 内各至少有一实根，即方程 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ 在 (a,b)
与 (b,c) 内各至少有一实根.

六、 ★ 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，$f(0)=f(2a)$, 证明：存在 $\xi\in[0,a]$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证明　设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$, 由于 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，$f(0)=f(2a)$, 故 $F(x)$

在 $[0,a]$ 上连续，且 $F(0)=f(0)-f(a),F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$, 于是 $F(0)F(a)=-(f(0)-f(a))^2\leqslant 0$. 如果 $F(0)F(a)=0$, 则 $F(0)=0$ 或 $F(a)=0$，取 $\xi=0$ 或 a 即可. 如果 $F(0)F(a)<0$, 则必有 $\xi\in(0,a)$, 使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

7　导数概念、函数的求导法则（一）

一、 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按照导数的定义观察，A 表示什么？

1. $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0-\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}=A$, 则 $A=$ ________.

   解 $A=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0-\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}=-\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0-\triangle x)-f(x_0)}{-\triangle x}=-f'(x_0)$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$, 且 $f(0)=0,f'(0)$ 存在，则 $A=$ ________.

   解 $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.

3. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$, 则 $A=$ ________.

   解 $A=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+(-f(x_0-h)+f(x_0))}{h}$

   $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}=2f'(x_0)$.

二、 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性：

1. $y=|\sin x|$;

解因为 $\lim\limits_{x\to0^+}|\sin x|=\lim\limits_{x\to0^+}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to0^-}|\sin x|=\lim\limits_{x\to0^-}(-\sin x)=0$, $\sin 0=0$, 故 $\lim\limits_{x\to0}|\sin x|=|\sin 0|$, 即 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处连续；

又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\frac{-\sin x}{x}=-1$, 故 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

2. $y=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$, $f(0)=0$, 故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$, 即 $f(x)$ 在

$x=0$ 处连续；又因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$.

三、 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1,\\ ax+b, & x>1,\end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，a,b 应取什么值？

解可导必连续.$f(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$, $f(1^+)=\lim\limits_{x\to1^{+-}}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(ax+b)=a+b$, 故 $a+b=1$;

又 $f'_-(1)=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{(1+h)^2-1}{h}=2$, $f'_+(1)=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{(a+ah+b)-1}{h}=a$, 故 $a=2$, 从而 $b=-1$.

四 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0,\\ x, & x\leqslant0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解当 $x>0$ 时，$f(x)=\sin x$, 故 $f'(x)=\cos x$; 当 $x<0$ 时，$f(x)=x$, 故 $f'(x)=1$;

$x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x-0}{x}=$ 1, 从而 $f'(0)=1$. 于是 $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0.\end{cases}$

五、 已知函数 $f(x)$ 可导，且对任意的实数 x,y 满足：（1）$f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)$；（2）$f'(0)=e$. 证明：$f'(x)=f(x)+e^{x+1}$.

证明 因为 $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)$，令 $x=y=0$ 得 $f(0)=2f(0)$, 即 $f(0)=0$.

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^x f(h)+e^h f(x)-f(x)}{h}=e^x\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+f(x)\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$

$=e^x\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+f(x)\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x f'(0)+f(x)\times 1=e^{x+1}+f(x)$.

六、 求下列函数在给定点处的导数：

1. $y=\sin x-\cos x$, 求 $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}$.
   解 $y=\sin x-\cos x y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=(\cos x+\sin x)|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.
2. $f(x)=\frac{3}{5-x}+\frac{x^2}{5}$, 求 $(f(0))', f'(0), f'(2)$.
   解因为 $f(0)=\frac{3}{5}$, 故 $(f(0))'=0$；$x\neq 5$ 时，$f'(x)=\frac{3}{(5-x)^2}+\frac{2x}{5}$, 故 $f'(0)=f'(x)|_{x=0}=\frac{3}{25}, f'(2)=f'(x)|_{x=2}=\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{17}{15}$.

8 函数的求导法则（二）、高阶导数

一、 求下列函数的导数：

1. $y=5x^3-2^x+3e^x+2$;
   解 $y'=15x^2-2^x\ln 2+3e^x$.
2. $y=e^{x+2}\cdot 2^{x-3}$;
   解 $y'=e^{x+2}\cdot 2^{x-3}+e^{x+2}\cdot 2^{x-3}\ln 2=(1+\ln 2)e^{x+2}\cdot 2^{x-3}$.

3. $y=(\arcsin x)^3$;

   解 $y'=3(\arcsin x)^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{3(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. $y=\ln(x+\sqrt{a^2-x^2})$;

   解 $y'=\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}(1+\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x))=\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x}{(x+\sqrt{a^2-x^2})\sqrt{a^2-x^2}}$.

5. $y=\ln\ln\ln(x^2+1)$;

   解 $y'=\frac{1}{\ln\ln(x^2+1)}\frac{1}{\ln(x^2+1)}\frac{1}{(x^2+1)}(2x)=\frac{2x}{(x^2+1)(\ln(x^2+1))\ln\ln(x^2+1)}$.

6. $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

   解 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\frac{1}{2}(\frac{1-x}{1+x})^{-\frac{1}{2}}\frac{-1\times(1+x)-(1-x)\times 1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.

7. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

   解 $y'=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}(x+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}))=\frac{4\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x}}$.

8. $y=\arcsin\frac{1}{x}$.

   解 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}(-\frac{1}{x^2})=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

二、 设 $f(x)$ 可导，求 $\frac{dy}{dx}$：

1. $y=f(e^x)e^{f(x)}$;

   解 $y'=f'(e^x)e^xe^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)=e^{f(x)}(f'(e^x)e^x+f(e^x)f'(x))$.

2. $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

   解 $y'=f'(\sin^2 x)2\sin x\cos x+f'(\cos^2 x)2\cos x\cdot(-\sin x)=(f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x))\sin 2x$.

三、 求下列函数的二阶导数：

1. $y=\sin x\cdot e^{2x-1}$;

   解 $y'=\cos x\cdot e^{2x-1}+\sin x\cdot e^{2x-1}\times 2=(2\sin x+\cos x)e^{2x-1}.\cdots$

   $y''=(2\cos x-\sin x)e^{2x-1}+(2\sin x+\cos x)2e^{2x-1}=(3\sin x+4\cos x)e^{2x-1}$.

2. $y=\ln x(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 $y'=\frac{1}{x(x+\sqrt{1+x^2})}(2x+\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}2x)=\frac{2x\sqrt{1+x^2}+2x^2+1}{x(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

（也可利用 $\ln x(x+\sqrt{1+x^2})=\ln x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, 再求导）

$y''=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(1+x^2)}\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=-x^{-2}-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$.

四、 设 $f(x)=(x+10)^6$, 求 $f'''(2),f^{(6)}(2),f^{(20)}(2)$.

解 由于 $f'(x)=6(x+10)^5$，$f''(x)=30(x+10)^4$，$f'''(x)=120(x+10)^3$，$f^{(6)}(x)=6!=720,f^{(20)}(x)=0$, 故 $f'''(2)=120\times12^3=207\,360,f^{(6)}(2)=720,f^{(20)}(2)=0$.

五、 求 $y=\frac{x^2}{x^2-3x-4}$ 的 n 阶导数.

解 因为 $y=\frac{x^2}{x^2-3x-4}=\frac{16}{5(x-4)}-\frac{1}{5(x+1)}+1$，故 $y'=-\frac{16}{5(x-4)^2}+\frac{1}{5(x+1)^2},y''=\frac{16\times2}{5(x-4)^3}-\frac{2}{5(x+1)^3},\cdots,y^n=(-1)^n\frac{16\times n!}{5(x-4)^{n+1}}+(-1)^{n-1}\frac{n!}{5(x+1)^{n+1}},n\in\mathbb{N}^+$.

9 隐函数及由参数方程确定的函数的导数、函数的微分

一、 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$：

1. $\sin(x+y)=\cos x\ln y$;

解 两边对 x 求导，$\cos(x+y)(1+y')=-\sin x\ln y+\cos x\frac{1}{y}y',y'=\frac{y\sin x\ln x+y\cos(x+y)}{\cos x-y\cos(x+y)}$.

2. $y^x=x^y(x>0,y>0)$.

解 两边对 x 求导,$(e^{x\ln y})'=(e^{y\ln x})'$, 即 $y^x(\ln y+\frac{x}{y}y')=x^y(y'\ln x+\frac{y}{x}),y'=\frac{x^yy^2-xy^{x+1}\ln y}{x^2y^x-x^{y+1}y\ln x}=\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$.

二、 用取对数求导数法则求下列函数的导数：

1. $y=(\sin x)^{\tan x}$;

解 因为 $\ln y=\tan x\cdot\ln\sin x$, 两边对 x 求导，$\frac{1}{y}y'=\sec^2 x\ln\sin x+\tan x\frac{1}{\sin x}\cos x=\sec^2 x\ln\sin x+1, y'=(\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x\ln\sin x+1)$.

2. $y=\frac{(3-x)^4\sqrt{x+2}}{(x+1)^5}$

解 因为 $\ln y=4\ln(3-x)+\frac{1}{2}\ln(x+2)-5\ln(x+1)$, 两边求导，$\frac{1}{y}y'=4\frac{-1}{3-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+2}-5\frac{1}{x+1}, y'=\frac{(3-x)^4\sqrt{x+2}}{(x+1)^5}(\frac{4}{x-3}+\frac{1}{2(x+2)}-\frac{5}{x+1})$.

三、 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$：

1. $\begin{cases} x=at^2, \\ y=bt^3; \end{cases}$

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3bt^2}{2at}=\frac{3bt}{2a}, \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(6bt)(2at)-(3bt^2)(2a)}{(2at)^3}=\frac{3b}{4a^2t}$.

2. $\begin{cases} x=\theta(1-\sin\theta), \\ y=\theta\cos\theta. \end{cases}$

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta+\theta(-\sin\theta)}{1-\sin\theta+\theta(-\cos\theta)}=\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$.

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}(\frac{dy}{dx})/\frac{dx}{d\theta}=-\frac{(2\sin\theta+\theta\cos\theta)(\sin\theta+\theta\cos\theta-1)+(\cos\theta-\theta\sin\theta)(2\cos\theta-\theta\sin\theta)}{(\sin\theta+\theta\cos\theta-1)^3}=\frac{\left(2+\theta^2-\theta\cos\theta-2\sin\theta\right)}{(1-\sin\theta-\theta\cos\theta)^3}$.

四、 求曲线在所给参数值相应的点处的切法线方程：

1. $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t, \end{cases} t=\frac{\pi}{4}$;

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t, t=\frac{\pi}{4}$ 时，$x=\frac{\sqrt{2}}{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{dy}{dx}|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$, 故所求切线方程为 $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-(x-\frac{\sqrt{2}}{2})$, 即 $x+y-\sqrt{2}=0$, 法线方程为 $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=(x-\frac{\sqrt{2}}{2})$，即 $x-y=0$.

2. $\begin{cases} x=\frac{3at}{1+t^2}, \\ y=\frac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases} t=2.$

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{(6at)(1+t^2)-(3at^2)(2t)}{(1+t^2)^2}}{\frac{(3a)(1+t^2)-(3at)(2t)}{(1+t^2)^2}}=\frac{2t}{(1-t^2)}$, $t=2$ 时, $x=\frac{6a}{5}$, $y=\frac{12a}{5}$, $\frac{dy}{dx}|_{t=2}=-\frac{4}{3}$, 故所求切线方程为 $y-\frac{12a}{5}=-\frac{4}{3}(x-\frac{6a}{5})$, 即 $4x+3y-12a=0$, 法线方程为 $y-\frac{12a}{5}=\frac{3}{4}(x-\frac{6a}{5})$，即 $3x-4y+6a=0$.

五、 求下列函数的微分：

1. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

   解 $dy=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx.$

2. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$.

   解 两边求导，$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{y'x-y}{x^2}$, $y'=\frac{x+y}{x-y}$, $dy=\frac{x+y}{x-y}dx.$

六、 求 $y=x|x|$ 的微分.

解 因为 $y=x|x|=\begin{cases} x^2, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x^2 & x<0,\end{cases}$ 故 $y'=\begin{cases} 2x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -2x & x<0,\end{cases}$ 于是 $dy=\begin{cases} 2xdx, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -2xdx & x<0,\end{cases}$

10 第二章习题课

一、 设 $f(x)=\begin{cases} e^{3x}+b, & x\leqslant 0,\\ \sin ax, & x>0,\end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 a,b 的值.

解 可导必连续. $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^{3x}+b)=1+b$, $f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sin ax=0$, 故 $1+b=0, b=-1$;

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{(e^{3h}+b)-(1+b)}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{e^{3h}-1}{h}=3$, $f'_+(0)=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{\sin ah-(1+b)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{\sin ah}{h}=a$, 故 $a=3$.

二、 求下列函数的导数：

1. $y=\operatorname{arccot}\sqrt{x^2-2x}$;

   解 $y'=-\frac{1}{1+(x^2-2x)}\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$.

2. $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{-x}})$.

   解 $y'=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{-x}}}(e^x+\frac{-e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}})=\frac{2e^x\sqrt{1+e^{-x}}-e^{-x}}{2(e^x+\sqrt{1+e^{-x}})\sqrt{1+e^{-x}}}$.

三、 设 $f(t)=(\sin\frac{\pi t}{2}-1)(\sin\frac{\pi t^2}{2}-2)\cdots(\sin\frac{\pi t^{200}}{2}-200)$, 求 $f'(1)$.

解 令 $g(t)=(\sin\frac{\pi t^2}{2}-2)\cdots(\sin\frac{\pi t^{200}}{2}-200)$, 则 $f(t)=(\sin\frac{\pi t}{2}-1)g(t), f'(t)=(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2})g(t)+(\sin\frac{\pi t}{2}-1)g'(t)$,

$f'(1)=(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2})g(1)+(\sin\frac{\pi}{2}-1)g'(1)=0$.

或 $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{\pi(1+h)}{2}-1}{h}\lim\limits_{h\to 0}g(1+h)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos\frac{h}{2}-1}{h}\lim\limits_{h\to 0}g(1+h)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(\frac{h}{2})^2}{h}\lim\limits_{h\to 0}g(1+h)=0$.

四、 设 $u=f(g(x)+y)$, 其中 $y=y(x)$ 由方程 $y^2+e^y=\sin(x+y)$ 确定，且 f,g 一阶可导，求 $\frac{du}{dx}$.

解 $\frac{du}{dx}=f'(g(x)+y)(g'(x)+y')$, 又 $2yy'+e^yy'=\cos(x+y)(1+y'), y'=\frac{\cos(x+y)}{2y+e^y-\cos(x+y)}$, 从而

$\frac{du}{dx}=f'(g(x)+y)(g'(x)+\frac{\cos(x+y)}{2y+e^y-\cos(x+y)})$.

五、 设 $f(x)$ 在 $x=e$ 处有连续的一阶导数，且 $f'(e)=\frac{2}{e}$, 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{d}{dx}f(e^{\cos\sqrt{x}})$.

解 因为 $\frac{d}{dx}f(e^{\cos\sqrt{x}})=f'(e^{\cos\sqrt{x}})e^{\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$，又 $f(x)$ 在 $x=e$ 处有连续的一阶导数，故 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(e^{\cos\sqrt{x}})=f'(\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\cos\sqrt{x}})=f'(e)=\frac{2}{e}$，于是

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{d}{dx}f(e^{\cos\sqrt{x}})=\lim\limits_{x\to0^+}f'(e^{\cos\sqrt{x}})\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-e^{\cos\sqrt{x}}}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{2}{e}\times\frac{-e}{2}\times1=-1.$

六、 已知 $\begin{cases}x=\ln\cos t,\\ y=\sin t-t\cos t,\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t-\cos t-t(-\sin t)}{\frac{1}{\cos t}(-\sin t)}=-t\cos t,\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\sin t+t\cos t)\tan t-t\sin t\sec^2 t}{(-\tan x)^3}=\frac{\cos t-t\sin t}{\tan t}.$

（或 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(-t\cos t)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=(-\cos t+t\sin t)\frac{1}{-\tan t}=\frac{\cos t-t\sin t}{\tan t}$）

$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{8}(4-\pi).$

七、 设 $y=\cos^3x$, 求 $y^{(n)}$.

解 因为 $\cos3x=4\cos^3x-3\cos x$, 故 $y=\cos^3x=\frac{1}{4}\cos3x+\frac{3}{4}\cos x$,

$y^{(n)}=\frac{1}{4}\cos^{(n)}3x+\frac{3}{4}\cos^{(n)}x=\frac{3^n}{4}\cos(3x+\frac{n\pi}{2})+\frac{3}{4}\cos(x+\frac{n\pi}{2}).$

11 中值定理

一、 验证函数 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 在 $[-1,2]$ 上满足罗尔定理的条件，并确定 ξ 的值.

解 因为 $f(-1)=f(x)|_{x=-1}=x^3+4x^2-7x-10\big|_{x=-1}=0$,
$f(2)=f(x)|_{x=2}=x^3+4x^2-7x-10\big|_{x=2}=0$,
$f'(x)=3x^2+8x-7,f'(\xi)=3\xi^2+8\xi-7=0$, 得 $\xi=\frac{\sqrt{37}-4}{3},-\frac{\sqrt{37}+4}{3}$.

二、 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$, 证明：在 (a,b) 内存在一点 c, 使得 $f'(c)=0$

证明因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则必在 (a,b) 内连续. 又 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$, 可补充定义，$f(a)=f(b)=A$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，满足罗尔定理的条件，于是必在 (a,b) 内存在一点 c, 使得 $f'(c)=0$.

三、 证明：$x \geqslant 1$ 时，有 $2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi$.

证明 $(2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2})' = 2\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0$,

故 $2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = C$($C$ 为常数), 又 $x = 1$ 时，$2\arctan 1 + \arcsin 1 = 2\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$，故 $C = \pi$, 即 $2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi$.

四、 设 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$，证明：方程 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$ 在 $(0,1)$ 内必有一个零点.

证明 令 $f(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}, x \in [0,1]$, 则 $f(0) = f(1) = 0, f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, 满足罗尔（Rolle）定理的条件，于是必有 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 0$，即 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$ 在 $(0,1)$ 内必有一个零点.

五、 ★ 设 $0 < y < x, p > 1$，证明：$py^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x-y)$.

证明 因为 $0 < y < x, p > 1$，故 $py^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x-y)$ 等价于 $py^{p-1} \leqslant \frac{x^p-y^p}{x-y} \leqslant px^{p-1}$. 令 $f(t) = t^p, t \in [y,x]$, 则 $f(t)$ 满足拉格朗日 (Lagrange) 中值定理的条件，于是有 $\xi \in (y,x)$ 使 $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$, 即 $\frac{x^p-y^p}{x-y} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi) = p\xi^{p-1}$, 由 $p > 1$ 知 $p-1 > 0, py^{p-1} \leqslant p\xi^{p-1} \leqslant px^{p-1}$, 即 $py^{p-1} \leqslant \frac{x^p-y^p}{x-y} \leqslant px^{p-1}$.

六、 ★ 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x) = -f(x)$ 且 $f(0) = 1$, 则 $f(x) = e^{-x}$.

证明 令 $F(x) = f(x)e^x$, 因为 $f'(x) = -f(x)$, 则 $F'(x) = f'(x)e^x + f(x)e^x = 0$, 故 $F(x) = C$, 又 $F(0) = f(0)e^0 = 1$, 故 $C = 1$, 即 $f(x)e^x = 1$，$f(x) = e^{-x}$.

七、 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，x_1,x_2,x_3 为 $[a,b]$ 上的三个点，$x_1 < x_2 < x_3$，且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 证明：存在一点 ξ 使得 $f''(\xi) = 0$.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，故 $f(x),f'(x)$ 在 (a,b) 内连续. 由于 $a\leqslant x_1<x_2<x_3\leqslant b$, 由拉格朗日中值定理，得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi_1)(x_2-x_1),f(x_3)-f(x_2)=f'(\xi_2)(x_3-x_2)$, 其中，$\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_3,x_2)$. 又 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, 故 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. 于是再由拉格朗日中值定理，得 $f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1),\xi\in(\xi_1,\xi_2)$. 从而 $f''(\xi)=0$.

12 罗必达法则、泰勒公式

一、 求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$;

   解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}x(2^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x}})$;

   解 $\lim\limits_{x\to\infty}x(2^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x}})=\lim\limits_{y\to0}\frac{2^y-3^y}{y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{2^y\ln2-3^y\ln3}{1}=\ln2-\ln3=\ln\frac{2}{3}$.

3. $\lim\limits_{x\to1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$;

   解 $\lim\limits_{x\to1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e})^{\frac{1}{x}}$;

   解 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\ln(1+x)\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

   解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}\ln\ln x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}}{1}}=1$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi}$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}e^{(2x-\pi)\ln\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}-\frac{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}{\frac{2}{(2x-\pi)^2}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}-\frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}-\frac{4(2x-\pi)}{2\cos 2x}}=e^0=1.$

二、 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, 故求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)+6x-\sin 6x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{6\sin 6x}{2x}=36.$

三、 求 $\sqrt{1+x}$ 的 3 阶麦克劳林展开式.

解 设 $f(x)=\sqrt{1+x}$, 则 $f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}, f(0)=1,$

$f'(0)=\frac{1}{2}, f''(0)=-\frac{1}{4}, f'''(0)=\frac{3}{8}$, 故所求麦克劳林（Maclaurin）展开式为

$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$

四、 求 $y=\frac{2}{x-1}$ 在 $x_0=2$ 处的 3 阶泰勒公式.

解 设 $f(x)=\frac{2}{x-1}$, 则 $f'(x)=-2(x-1)^{-2}, f''(x)=4(x-1)^{-3}, f'''(x)=-12(x-1)^{-4}, f(2)=2,$

$f'(2)=-2, f''(2)=4, f'''(2)=-12$, 故所求泰勒（Taylor）公式为

$\frac{2}{x-1}=2-2(x-2)+2(x-2)^2-2(x-2)^3.$

五、 利用泰勒公式求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))$;

解 因为 $\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(\frac{1}{x})^2+\frac{1}{3}(\frac{1}{x})^3+o((\frac{1}{x})^3)$,

故 $x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})=x-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})$,

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))=\frac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$.

解 因为 $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4),\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$, 从而 $\sin x-x\cos x=\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$,

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3}=\frac{1}{3}$.

13 函数单调性和曲线的凹凸性、函数的极值与最值 (1)

一、 求下列函数的单调区间:

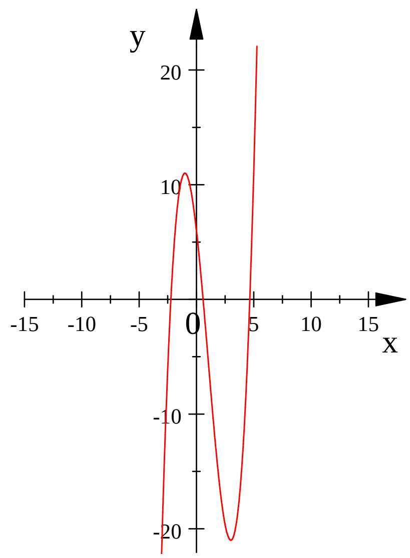
1. $y=x^3-3x^2-9x+6$;

解 因为 $y'=3x^2-6x-9, 3x^2-6x-9=0$ 的两根为 $x_1=3, x_2=-1$. 由 $y'>0$ 得 $x<-1$ 或 $x>3$; 由 $y'<0$ 得 $-1<x<3$. 故单调增区间分别为 $(-\infty,-1],[3,+\infty)$, 单调减区间为 $[-1,3]$.

说明:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$	$\nearrow$	极大值，11	$\searrow$	极小值，-21	$\nearrow$

x^3-3x^2-9x+6

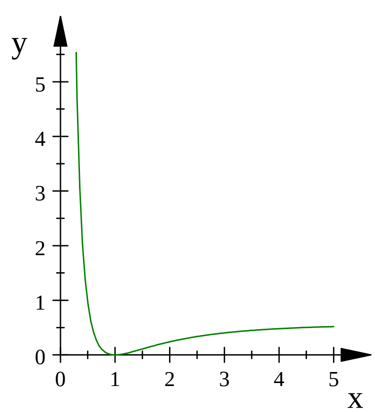


$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ 的单调性

2. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

解 $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,因为 $y\prime = \frac{(2\ln x)\cdot\frac{1}{x}x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(2\ln x - \ln^2 x\right) = 0$ 的根为 $x_1 = 1, x_2 = e^2$. 当 $x \in (0, 1]$ 或 $x \in [e^2, +\infty)$ 时，$y\prime < 0$;
当 $x \in [1, e^2]$ 时，$y' > 0$. 故单调减区间分别为 $(0, 1][e^2, +\infty)$，单调增区间为 $[1, e^2]$.

$\frac{\ln^2 x}{x}$



$y=\frac{\ln^2 x}{x}$ 的单调性

二、　证明下列不等式：

1. $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$;

证明　令 $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-3, f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-\sqrt{x}}{x^{\frac{5}{2}}}$, 当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$, 即 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加，于是当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$, 即 $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$.

2. $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x\geqslant\frac{2x}{\pi}$.

证明　令 $f(x)=\sin x-\frac{2x}{\pi}, x\in[0,\frac{\pi}{2}]. f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0, f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}, f''(x)=-\sin x<0$　($x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时）即 $f(x)$ 为上凸函数．当 $x\in[0,\arccos\frac{2}{\pi}]$ 时，

$f'(x)>0$, 即 $f(x)$ 为单调增函数；当 $x\in[\arccos\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}]$ 时，$f'(x)<0$, 即 $f(x)$ 为单调减函数. 于是 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$，即 $f(x)\geqslant 0, \sin x\geqslant\frac{2x}{\pi}$

或原不等式等价于 $\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{2}{\pi}, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 则，$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{(x-\tan x)\cos x}{x^2}$, 因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$\frac{\cos x}{x^2}\geqslant 0, x\leqslant\tan x$, 故 $f'(x)\leqslant 0$, 从而 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上是减函数，$f(x)\geqslant f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$, 即 $\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{2}{\pi}, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

三、　讨论方程 $\ln x=2x$ 的实根数目.

解　　令 $f(x)=\ln x-2x, x\in(0,+\infty). f'(x)=\frac{1}{x}-2=0$ 的根为 $x=\frac{1}{2}$. 当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，$f'(x)>0$, 即 $f(x)$ 单调增加. 当 $x\in(\frac{1}{2}+\infty)$ 时，$f'(x)<0$, 即 $f(x)$ 单调减小. 故 $f(\frac{1}{2})$ 是 $f(x)$ 的最大值，但 $f(\frac{1}{2})=-\ln 2-1<0$, 即 $f(x)\leqslant f(\frac{1}{2})<0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点，$\ln x=2x$ 无实根.

四、　求下列函数的凹凸区间及拐点：

1. $y=\frac{x^3}{x^2+1}$;

解 $y=\frac{x^3}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbb{R}.y'=(x-\frac{x}{x^2+1})'=1-\frac{(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=1-\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}>0$,

$y''=-\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}=0$ 的根为 $x_1=0,x_2=-\sqrt{3},x_3=\sqrt{3}$, 相应地 $y_1=0,y_2=-\frac{3\sqrt{3}}{4},y_3=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 当 $x\in(-\infty,-\sqrt{3})$ 或 $x\in(0\sqrt{3})$ 时，$y''>0$, 即凹区间为 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 或 $(0\sqrt{3})$；当 $x\in(-\sqrt{3}0)$ 或 $x\in(\sqrt{3}+\infty)$ 时，$y''<0$, 即凸区间为 $(-\sqrt{3},0)$ 或 $(\sqrt{3},+\infty)$.

拐点为 $(0,0),(-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{4}),(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{4})$.

2. $y=xe^x$.

解 $y=xe^x$ 的定义域为 $\mathbb{R}.y'=e^x+xe^x=e^x(1+x),y''=e^x(1+x)+e^x=e^x(2+x)=0$ 的根为 $x_1=-2$, 相应地 $y_1=-2e^{-2}$. 当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$y''<0$, 即凸区间为 $(-\infty,-2)$; 当 $x\in(-2,+\infty)$ 时，$y''>0$, 即凹区间为 $(-2+\infty)$. 拐点为 $(-2,-2e^{-2})$.

五、 已知点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，求 a,b.

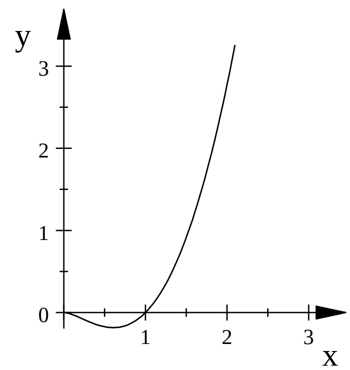
解 $y'=3ax^2+2bx,y''=6ax+2b$, 由于 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，故 $3=a+b,6a+2b=0$, 解得 $a=-\frac{3}{2},b=\frac{9}{2}$.

六、 求下列函数的极值：

1. $y=x^2\ln x$;

解 $y=x^2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty).y'=2x\ln x+x=0$ 的根为 $x_1=e^{-\frac{1}{2}}.x\in(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 时，$y'<0;x\in(e^{-\frac{1}{2}}+\infty)$ 时，$y'>0$. 故 $x=e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$f(x)$ 极小值为 $f(e^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2e}$.

$x^2\ln x$



$y=x^2\ln x$ 的极值

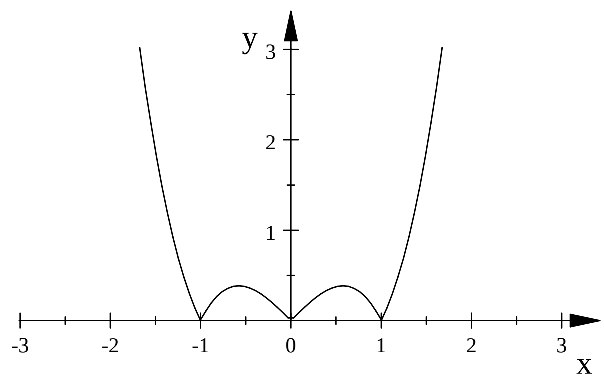
2. $y=|x(x^2-1)|$.

解 $y=|x(x^2-1)|$ 是 $\mathbb{R}$ 上的偶函数,考虑 $[0,+\infty)$.$y=|x(x^2-1)|=\begin{cases}-x^3+x, & 0<x\leqslant 1,\\ x^3-x, & x>1,\end{cases}$ $y'=\begin{cases}-3x^2+1, & 0<x<1,\\ \text{不存在}, & x=1,\\ 3x^2-1, & x>1,\end{cases}$ 由 $y'=0$ 得 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

x	$(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{\sqrt{3}}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	不存在	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

于是 $x=0$ 时,极小值为 $f(0)=0$;$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,极大值为 $f(\pm\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{2\sqrt{3}}{9}$;$x=\pm 1$ 时,极小值为 $f(\pm 1)=0$.

$\left|x(x^2-1)\right|$



$y=\left|x(x^2-1)\right|$ 的极值

14　函数的极值与最值 (2)、函数图形的描绘

一、　求函数 $y=x+2\sqrt{x}$ 在区间 $[0,4]$ 上的最大值与最小值.

解　$y'=1+\frac{1}{\sqrt{x}}>0$, 故最大值为 $y|_{x=4}=8$, 最小值为 $y|_{x=0}=0$.

二、　已知船航行一昼夜的费用由两部分组成：一为固定部分 a 元；另一为变动部分，它与速度的立方成正比. 试问当船的航程为 s 时，船应以怎样的速度 v 行驶，费用最省？

解　设所需费用为 y 元，则航程为 s 时所需时间为 $\frac{s}{v}$. 由于每小时航行所需费用为 $\frac{a+kv^3}{24}$, 其中 k 是大于零的常数. 从而 $y=\frac{a+kv^3}{24}\cdot\frac{s}{v}=\frac{as}{24v}+\frac{ksv^2}{24}, y'=-\frac{as}{24v^2}+\frac{ksv}{12}=0$ 的惟一零点为 $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$，故 $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$ 时，费用最省.

三、　过平面上点 $P(1,4)$ 作一直线，使得它在两坐标轴上的截距都是正的，且它们的和最小，求此直线的方程.

解　设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, 其中 a,b 为坐标轴上的截距，$a>0,b>0$. 又直线过点 $P(1,4)$，故 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1. f(a)=a+b=a+\frac{4a}{a-1}, f'(a)=1+\frac{4(a-1)-4a}{(a-1)^2}=1-\frac{4}{(a-1)^2}=0$, 得 $a=3$, 从而 $b=6$. 当 $a<3$ 时, $f'(a)<0$,

当 $a>3$ 时，$f'(a)>0$，从而 $a=3$ 时，$f(a)=a+b$ 取最小值，故所求直线方程为 $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$, 即 $2x+y-6=0$.

四、　求椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大点与最小点.

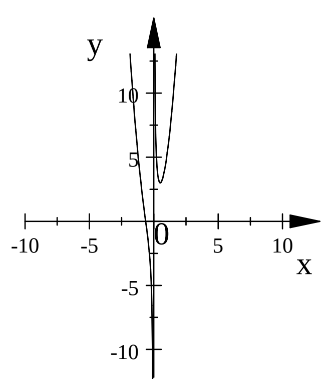
解　利用隐函数求导，有 $2x-y-xy'+2yy'=0, y'=\frac{2x-y}{x-2y}$. 令 $y'=0$，得 $y=2x$, 代入椭圆方程，得 $x^2-2x^2+4x^2=3, x=\pm 1, y=\pm 2$. 当 $x-2y=0$ 时，,y' 不存在，此时切线垂直于 x 轴，将 $y=\frac{x}{2}$ 代入椭圆方程，得 $x^2-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2=3, x=\pm 2, y=\pm 1$, 求出驻点及不可导点后，比较得 $(1,2),(-1,-2)$ 分别是纵坐标最大点与最小点.

五、　试作函数 $y=\frac{1}{x}+4x^2$ 的图形.

解　$y=\frac{1}{x}+4x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.　$y'=-\frac{1}{x^2}+8x=0$ 的根为 $x_1=\frac{1}{2}.y''=\frac{2}{x^3}+8=0$ 的根 $x_2=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}.\lim\limits_{x\to 0}y=\infty, x=0$ 是垂直渐近线.

x	$(-\infty,-\frac{\sqrt[3]{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2},0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	拐点	$\searrow$	$\searrow$	极小值，3	$\nearrow$

$\frac{1}{x}+4x^2$



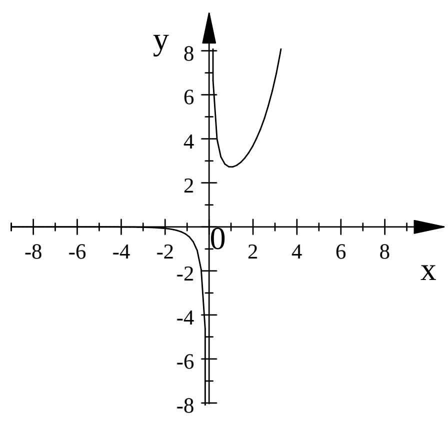
$y=\frac{1}{x}+4x^2$ 的图形

六、 作函数 $y=\frac{e^x}{x}$ 的图形.

解 $y=\frac{e^x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.$y'=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=0$ 的零点为 $x_1=1$.$y''=\frac{e^x x^3-(e^x x-e^x)2x}{x^4}=\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}=0$ 没有零点. $\lim\limits_{x\to 0^+}y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}y=-\infty$, $x=0$ 是垂直渐近线， $\lim\limits_{x\to -\infty^-}y=0$, $y=0$ 是水平渐近线.

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	↘	极小值，e	↗

$\frac{e^x}{x}$



$y=\frac{e^x}{x}$ 的图形

15 曲率 (1),(2)、第三章习题课

一、 求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-\sin(x-1)}{\sqrt[3]{2x-x^2}-1}$;

解 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-\sin(x-1)}{\sqrt[3]{2x-x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-\sin(x-1)}{\sqrt[3]{1-(x-1)^2}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-\sin(x-1)}{-\frac{1}{3}(x-1)^2}=-3\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-\cos(x-1)}{2(x-1)}=-3\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}+\sin(x-1)}{2}=-3\times(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})$;

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})}{\frac{1}{n}}}$, 又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x})}\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x})\cdot(-\frac{2}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x})}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x})}=4$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=e^4$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})\cot x$;

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})\cot x=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\cos x}{x\sin^2 x}=1\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}$ $(a,b,c$ 是正数).

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}(\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{a^x+b^x+c^x}(a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c)}{1}}=e^{\frac{\ln(abc)}{3}}=(abc)^{\frac{1}{3}}$.

二、 证明下列不等式:

1. ★ 设 $x>0$, 证明: $(1+x)\ln^2(1+x)-x^2<0$;

证明 令 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2, x\in(0,+\infty)$. $f'(x)=\ln^2(1+x)+(1+x)2\frac{\ln(1+x)}{1+x}-2x$
$=\ln^2(x+1)+2\ln(1+x)-2x$, $f''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2(\ln(1+x)-x)}{1+x}$, $f'''(x)=\frac{2(\frac{1}{1+x}-1)(1+x)-2(\ln(1+x)-x)}{(1+x)^2}=\frac{-2\ln(1+x)}{(1+x)^2}<0$, 于是 $f''(x)<f''(0)=0$, $f'(x)<f'(0)=0$, $f(x)<f(0)=0$, 即 $(1+x)\ln^2(1+x)-x^2<0$.

或令 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}},x\in(0,+\infty).g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}=\frac{2\sqrt{1+x}-(x+2)}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$,

令 $h(x)=2\sqrt{1+x}-(x+2)$，因为 $h'(x)=\frac{2}{2\sqrt{1+x}}-1=\frac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}<0$, 故 $h(x)<h(0)=0$, 从而 $g(x)<0$, 即 $\ln(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}}<0$, 故 $x>0$ 时 $(1+x)\ln^2(1+x)-x^2<0$.

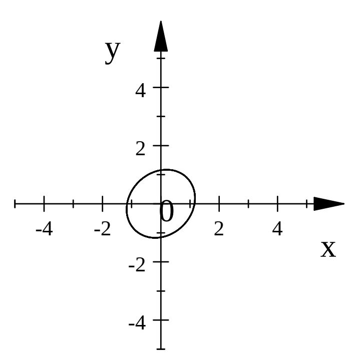
2. ★ 当 $0<x<1$ 时，$e^{-x}+\sin x<1+\frac{x^2}{2}$.

证明 令 $f(x)=e^{-x}+\sin x-1-\frac{x^2}{2}, f'(x)=-e^{-x}+\cos x-x, f''(x)=e^{-x}-\sin x-1, f'''(x)=-e^{-x}-\cos x<0$, 故 $f''(x)<f''(0)=0, f'(x)<f'(0)=0, f(x)<f(0)=0$, 即 $0<x<1$ 时，$e^{-x}+\sin x<1+\frac{x^2}{2}$.

三、 求椭圆 $3x^2-xy+3y^2=4$ 上离原点 O 最远及最近的点.

解 用 $(-x,-y)$ 代 (x,y), 椭圆方程 $3x^2-xy+3y^2=4$ 不变，故椭圆关于原点 O 对称，从而椭圆中心为原点. 于是椭圆长轴与短轴的顶点即为最远点与最近点. 设椭圆上的点 $P(x_0,y_0)$ 的切线与法线 PO 垂直. 利用隐函数求导，有 $6x-y-xy'+6yy'=0, y'=\frac{6x-y}{x-6y}$. 故 $\frac{6x_0-y_0}{x_0-6y_0}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-1$，得 $x_0^2=y_0^2$，又 $3x_0^2-x_0y_0+3y_0^2=4$，得 $x_0=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5},\pm\frac{2\sqrt{7}}{7}$. 于是最远点为 $(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}),(-\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}), d_{\max}=\sqrt{2}\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$；最近点为 $(\frac{2\sqrt{7}}{7},-\frac{2\sqrt{7}}{7}),(-\frac{2\sqrt{7}}{7},\frac{2\sqrt{7}}{7})$,
$d_{\min}=\sqrt{2}\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{2\sqrt{14}}{7}$.

$3x^2-xy+3y^2=4$



$3x^2-xy+3y^2=4$ 的最远点与最近点

四、 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中最大的一项.

解　令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}},x>0.f'(x)=(e^{\frac{\ln x}{x}})'=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}=0$ 的根为 $x=e$. 于是，$0<x<e$ 时，$f'(x)>0,x>e$ 时，$f'(x)<0$. 即 $f(x)$ 的最大值为 $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$. 由于 $2<e<3,f(2)=\sqrt{2}<f(3)=\sqrt[3]{3}$, 故 $f(3)=\sqrt[3]{3}$ 是数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中最大的一项.

五、 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，则必有 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

证明　令 $F(x)=xf(x)$, 因为 $f(1)=0$ 故 $F(0)=F(1)=0$，且由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 由罗尔定理，必有 $\xi\in(0,1)$, 使 $F'(\xi)=0$. 由于 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$, 知 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

六、 ★ 设 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上有定义，$f'(x)$ 存在且单调减少，$f(0)=0$，试用拉格朗日定理证明：$0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c,f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$.

证明　由于 $f(0)=0$，故 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$ 等价于 $f(a+b)-f(b)\leqslant f(a)-f(0)$. 当 $a=0$ 时，显然成立. 当 $a\neq0$ 即 $a>0$ 时，因为 $f(a+b)-f(b)=f'(\xi_1)a,\xi_1\in(b,a+b)f(a)-f(0)=f'(\xi_2)a,\xi_2\in(0,a)$,

由于 $f'(x)$ 存在且单调减少，且 $\xi_1>\xi_2$, 故 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$, 而 $a>0,f'(\xi_1)a<f'(\xi_2)a$, 即 $f(a+b)-f(b)\leqslant f(a)-f(0)$.

16　不定积分的概念和性质、换元积分法

一、 求下列不定积分：

1. $\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2dx$;

   解　$\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2dx=\int(x+2+\frac{1}{x})dx=x^2+2x+\ln|x|+C$.

2. $\int(\frac{1-x}{x})^2dx$;

解 $\int(\frac{1-x}{x})^2dx=\int(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1)dx=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C.$

3. $\int\frac{2-x^4}{1+x^2}dx$;

解 $\int\frac{2-x^4}{1+x^2}dx=\int(\frac{1}{1+x^2}+(1-x^2))dx=\arctan x+x-\frac{x^3}{3}+C.$

4. $\int\frac{2\times3^x-3\times2^x}{5^x}dx$;

解 $\int\frac{2\times3^x-3\times2^x}{5^x}dx=\int(2(\frac{3}{5})^x-3(\frac{2}{5})^x)dx=\frac{2(\frac{3}{5})^x}{\ln\frac{3}{5}}-\frac{3(\frac{2}{5})^x}{\ln\frac{2}{5}}+C.$

5. $\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx$;

解 $\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}dx=\int(\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x})dx=-\cot x+\tan x+C.$

6. $\int\frac{\cos2x}{\sin x+\cos x}dx$;

解 $\int\frac{\cos2x}{\sin x+\cos x}dx=\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x+C.$

7. $\int(\sin x-\csc x)\cot xdx.$

解 $\int(\sin x-\csc x)\cot xdx=\int(\cos x-\csc x\cot x)dx=\sin x+\csc x+C.$

二、 设曲线 C 过点 $(e^2,3)$，且在任一点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数，求此曲线方程.

解 由题意，$y'=\frac{1}{x},y=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$, 又 $3=\ln\left|e^2\right|+C$, 故 $C=1$, 于是 $y=\ln|x|+1$.

三、 设 $f'(\tan^2x)=\sec^2x,f(0)=1$，求 $f(x)$.

解 由题意，$f'(\tan^2x)=\sec^2x=1+\tan^2x$, 故 $f'(u)=1+u,f(u)=\int(1+u)du=u+\frac{u^2}{2}+C$, 又 $f(0)=1$, 得 $C=1$, 于是，$f(u)=u+\frac{u^2}{2}+1$, 即 $f(x)=x+\frac{x^2}{2}+1$.

17 换元积分法 (续)

一、 求下列不定积分：

1. $\int \sqrt[3]{(1-2x)^2}dx$;

解 $\int \sqrt[3]{(1-2x)^2}dx \overset{u=1-2x}{=} \int \sqrt[3]{u^2}(-\frac{1}{2})du = -\frac{3}{10}u^{\frac{5}{3}} + C = -\frac{3}{10}(1-2x)^{\frac{5}{3}} + C$.

或 $\int \sqrt[3]{(1-2x)^2}dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{(1-2x)^2}d(1-2x) = -\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}(1-2x)^{\frac{5}{3}} + C$.

2. $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$;

解 $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx \overset{x=u^2}{=} \int \frac{1}{(1+u^2)u}2udu = 2\arctan u + C = 2\arctan\sqrt{x} + C$.

或 $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{1}{(1+(\sqrt{x})^2)}d\sqrt{x} = 2\arctan\sqrt{x} + C$.

3. $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

解 $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})d\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{2}\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) + C$.

记住结论：$(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$;

解 $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{1}{(e^x)^2+1}de^x = \arctan e^x + C$.

5. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$;

解 $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{1}{\sin^3 x}d\sin x = -\frac{1}{2}\sin^{-2}x + C$.

6. $\int \sin^3 x dx$;

解 $\int \sin^3 x dx = -\int \sin^2 x d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)d\cos x = -\cos x + \frac{\cos^3}{3} + C$.

7. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

解 $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int e^{\arcsin x}d\arcsin x = e^{\arcsin x} + C$.

8. $\int \sin x\cos\frac{x}{2}dx$;

解 $\int \sin x \cos\frac{x}{2}dx = \int 2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}dx = -4\int\cos^2\frac{x}{2}d\cos\frac{x}{2} = -\frac{4}{3}\cos^3\frac{x}{2} + C.$

或 $\int \sin x\cos\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2})dx = \frac{1}{3}\int\sin\frac{3x}{2}d\frac{3x}{2} + \int\sin\frac{x}{2}d\frac{x}{2}$

$= -\frac{1}{3}\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{x}{2} + C.$

9. $\int \frac{1+\ln x}{x\ln x}dx;$

解 $\int\frac{1+\ln x}{x\ln x}dx = \int(\frac{1}{x\ln x}+\frac{1}{x})dx = \int\frac{1}{\ln x}d\ln x + \int\frac{1}{x}dx = \ln|\ln x| + \ln|x| + C.$

10. $\int\frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx \quad (a>0);$

解 $\int\frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx \overset{x=a\sin u}{\underset{u\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{=}} \int\frac{1}{(a\cos u)^3}a\cos u du = \int\frac{1}{a^2\cos^2 u}du = \frac{1}{a^2}\tan u + C$

$= \frac{1}{a^2}\times\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C.$

11. $\int\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx;$

解 $\int\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d(a^2+x^2) = \left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{a^2+x^2} + C.$

12. ★ $\int\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 $\int\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx \overset{x=\sin u}{\underset{\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{=}} \int\frac{1}{\sin u+\cos u}\cos u du = \int\frac{1}{\tan u+1}du \overset{v=\tan u}{=} \int\frac{1}{v+1}\times\frac{1}{1+v^2}dv$

$= \int(\frac{1}{2(1+v)} + \frac{1-v}{2(1+v^2)})dv = \frac{1}{2}\ln(1+v) + \frac{1}{2}\arctan v - \frac{1}{4}\ln(1+v^2) + C$

$= \frac{1}{2}\arctan v + \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{\sqrt{1+v^2}} + C = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\tan u}{\frac{1}{\cos u}} + C$

$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\ln(\sin u + \sqrt{1-\sin^2 u}) + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1-x^2}) + C.$

或 $\int\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx \overset{x=\sin u}{\underset{\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{=}} \int\frac{1}{\sin u+\cos u}\cos u du$, 令 $\cos u = A(\sin u+\cos u) + B(\sin u+\cos u)' = (A-B)\sin u + (A+B)\cos u$, 则 $\begin{cases} A-B=0, \\ A+B=0, \end{cases}$ 从而 $A=B=\frac{1}{2}$, 于是 $\int\frac{1}{\sin u+\cos u}\cos u du = \frac{1}{2}\int du + \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin u+\cos u}d(\sin u+\cos u)$
$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\ln|\sin u+\cos u| + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1-x^2}) + C.$

18 分部积分法、有理函数的积分

求下列不定积分：

1. $\int(\frac{\ln x}{x})^2dx$;

解 $\int(\frac{\ln x}{x})^2dx=\int\ln^2xd(-\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\ln^2x+\int\frac{2}{x^2}\ln xdx=-\frac{1}{x}\ln^2x-2\int\ln xd(\frac{1}{x})$
$=-\frac{1}{x}\ln^2x-2\frac{1}{x}\ln x+2\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln^2x-2\frac{1}{x}\ln x-2\frac{1}{x}+C=-\frac{\ln^2x+2\ln x+2}{x}+C$.

2. ★ $\int x\sin^2xdx$;

解 $\int x\sin^2xdx=\int x\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int xdx-\frac{1}{2}\int x\cos 2xdx=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\int xd\sin 2x$
$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{4}\int\sin 2xdx=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

或因为 $\int x\sin^2xdx=-\int x\sin xd\cos x=-x\sin x\cos x+\int(\sin x+x\cos x)\cos xdx$
$=-x\sin x\cos x+\int\sin xd\sin x+\int x\cos^2xdx=-x\sin x\cos x+\frac{\sin^2x}{2}+\int(x-x\sin^2x)dx$
$=-\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{\sin^2x}{2}+\frac{x^2}{2}-\int x\sin^2xdx$,

故 $\int x\sin^2xdx=-\frac{x\sin 2x}{4}+\frac{\sin^2x}{4}+\frac{x^2}{4}+C$.

或 $\int x\sin^2xdx=\frac{1}{2}\int\sin^2xdx^2=\frac{1}{2}x^2\sin^2x-\frac{1}{2}\int x^22\sin x\cos xdx$
$=\frac{1}{2}x^2\sin^2x+\frac{1}{4}\int x^2d\cos 2x$
$=\frac{1}{2}x^2\sin^2x+\frac{1}{4}x^2\cos 2x-\frac{1}{4}\int 2x\cos 2xdx=\frac{1}{2}x^2\sin^2x+\frac{1}{4}x^2\cos 2x-\frac{1}{4}\int xd\sin 2x$
$=\frac{1}{2}x^2\sin^2x+\frac{1}{4}x^2\cos 2x-\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{4}\int\sin 2xdx$
$=\frac{1}{2}x^2\sin^2x+\frac{1}{4}x^2\cos 2x-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$.
$=\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+C$.

3. $\int xe^{1+x}dx$;

解 $\int xe^{1+x}dx=\int xde^{1+x}=xe^{1+x}-\int e^{1+x}dx=xe^{1+x}-e^{1+x}+C=(x-1)e^{1+x}+C$.

4. $\int e^{\sqrt{x}}dx$;

解 $\int e^{\sqrt{x}}dx \overset{x=u^2}{=} \int e^u 2udu = 2\int ude^u = 2ue^u - 2\int e^u du = 2ue^u - 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$

5. $\int \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$;

解 $\int \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx = \int(\arctan x - \frac{\arctan x}{1+x^2})dx = \int \arctan x dx - \frac{1}{2}\int d\arctan^2 x$

$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\arctan^2 x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan^2 x + C.$

6. $\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$;

解 $\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int(\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2})dx$

$= \frac{1}{4}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + C.$

7. $\int \frac{1}{x(x^5+1)}dx$;

解 $\int \frac{1}{x(x^5+1)}dx = \int(\frac{1}{x} - \frac{x^4}{x^5+1})dx = \ln|x| - \frac{1}{5}\ln\left|x^5+1\right| + C.$

8. ★$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$;

解 $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx = \int \frac{2}{2+\cos x}dx + \int \frac{1}{2+\cos x}d(2+\cos x) = \ln(2+\cos x) + 2\int \frac{1}{2+\cos x}dx$

$= \ln(2+\cos x) + \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\frac{x}{2}) + C.$

说明:用万能代换,$\int \frac{1}{2+\cos x}dx = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{t^2+3}dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}d(\frac{t}{\sqrt{3}})$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\frac{x}{2}) + C.$

9. ★$\int \frac{1}{\sin x+\tan x}dx$;

解 $\int \frac{1}{\sin x+\tan x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x\cos x+\sin x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x(\cos x+1)}dx$

$= \int \frac{1-\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}d(\tan\frac{x}{2}) = \int(\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2})d(\tan\frac{x}{2})$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + C.$

或用万能代换,$\int \frac{1}{\sin x+\tan x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t}{1-t^2}} \times \frac{2}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt - \frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{4}t^2 + C = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + C.$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}dx$;

解 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}dx \overset{x=u^4}{=} \int \frac{1}{u^2(1+u)^3}4u^3du = 4\int \frac{u}{(1+u)^3}du = 4\int (\frac{1}{(1+u)^2} - \frac{1}{(1+u)^3})du$
$= -\frac{4}{1+u} + \frac{2}{(1+u)^2} + C = -\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} + C.$

11. ★$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}dx.$

解 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}dx = \int \frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}dx \overset{\frac{x-1}{x+1}=u^3}{=} \int \frac{1}{\frac{2}{1-u^3}u} \times \frac{6u^2}{(1-u^3)^2}du$
$= \int \frac{3u}{(1-u^3)}du = \int (\frac{u-1}{u^2+u+1} - \frac{1}{u-1})du$
$= \frac{1}{2}\ln\left(u^2+u+1\right) - \ln(u-1) - \sqrt{3}\arctan\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}\right) + C$
$= \frac{1}{2}\ln\frac{u^2+u+1}{u^2-2u+1} + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right) + C$
$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x^2-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt[3]{(x^2-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

19 第四章习题课

一、 求下列不定积分：

1. $\int \frac{\sin x\cos x}{2+\sin^4 x}dx$;
解 $\int \frac{\sin x\cos x}{2+\sin^4 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2+\sin^4 x}d\sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)^2}d\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right) =$
$\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

2. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$;
解 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+e^x}}d(e^x+1) = 2\int xd\sqrt{1+e^x} = 2x\sqrt{1+e^x} -$
$2\int \sqrt{1+e^x}dx$
$\overset{t=\sqrt{1+e^x}}{=} 2x\sqrt{1+e^x} - 2\int t\frac{2t}{t^2-1}dt = 2x\sqrt{1+e^x} - 4\int (1+\frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)})dt$
$= 2x\sqrt{1+e^x} - 4t - 2\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = 2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| +$
$C.$

3. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$;

解 $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx \underset{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\overset{x=\tan t}{=}} \int \frac{1}{\tan^2 t\sec t}\sec^2 tdt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{1}{\sin^2 t}d\sin t$

$= -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$

4. $\int \frac{1}{1+2\tan^2 x}dx$;

解 $\int \frac{1}{1+2\tan^2 x}dx \overset{x=\arctan t}{=} \int \frac{1}{1+2t^2} \times \frac{1}{1+t^2}dt = \int (\frac{2}{1+2t^2} - \frac{1}{1+t^2})dt$

$= \sqrt{2}\int \frac{1}{1+(\sqrt{2}t)^2}d(\sqrt{2}t) - \arctan t = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}t) - \arctan t + C$

$= \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x) - x + C.$

5. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}dx$;

解 $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}dx \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{1+(\frac{1}{t})^3+(\frac{1}{t})^6}}(-\frac{1}{t^2})dt = -\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3+t^6}}dt$

$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^3+t^6}}dt^3 \overset{u=t^3}{=} -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1+u+u^2}}du = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2u+1}{\sqrt{3}})^2}}d(\frac{2u+1}{\sqrt{3}})$

$= -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+(\frac{2u+1}{\sqrt{3}})^2}\right| + C == -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3}{x^3\sqrt{3}} + \sqrt{1+(\frac{2+x^3}{x^3\sqrt{3}})^2}\right| + C.$

说明：令 $x=\frac{1}{t}$ 称为“倒代换”. 记住 $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C.$

6. $\int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx$;

解 $\int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx = \int \frac{\cos x}{x}dx + \int \sin x d\frac{1}{x} = \int \frac{\cos x}{x}dx + \frac{\sin x}{x} - \int \frac{\cos x}{x}dx = \frac{\sin x}{x} + C.$

7. $\int \frac{\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}dx$;

解 $\int \frac{\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}dx = \int \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{1+x})\sqrt{x(1+x)}}{(\sqrt{x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})}dx$

$= \int(-x\sqrt{1+x} + (1+x)\sqrt{x})dx = -\int x\sqrt{1+x}dx + \int(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}})dx = -\int x\sqrt{1+x}dx + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}},$

而 $\int x\sqrt{1+x}dx \overset{t=\sqrt{1+x}}{=} \int(t^2-1)t\cdot 2tdt = 2\int(t^4-t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C$

$=\frac{2}{5}(1+x)^2\sqrt{1+x}-\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}+C.$

从而原式 $=-\frac{2}{5}(1+x)^2\sqrt{1+x}+\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C.$

8. $\int\frac{x^{11}}{(x^8+1)^2}dx.$

解 $\int\frac{x^{11}}{(x^8+1)^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^8}{(x^8+1)^2}dx^4\overset{t=x^4}{=}\frac{1}{4}\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt\overset{t=\tan u}{=}\frac{1}{4}\int\frac{\tan^2 u}{\sec^4 u}\sec^2 udu$

$=\frac{1}{4}\int\sin^2 udu=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 2u}{2}du=\frac{1}{8}(u-\frac{1}{2}\sin 2u)+C$

$=\frac{1}{8}(u-\frac{\tan u}{1+\tan^2 u})+C$

$=\frac{1}{8}\arctan t-\frac{1}{8}\times\frac{t}{1+t^2}+C=\frac{1}{8}\arctan x^4-\frac{x^4}{8(1+x^8)}+C.$

二、 ★ 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{2x-x^2}, & 0<x<2,\\ x\ln(x-1), & x\geqslant 2,\end{cases}$ 计算 $\int f(x)dx.$

解 当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=xe^{-x}$，$\int f(x)dx=\int xe^{-x}dx=-\int xde^{-x}=-xe^{-x}+\int e^{-xdx}=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1$;

当 $0<x<2$ 时，$f(x)=\sqrt{2x-x^2},\int f(x)dx=\int\sqrt{2x-x^2}dx=\int\sqrt{1-(x-1)^2}dx$

$\overset{x-1=\sin t}{=}\int\cos^2 tdt=\int\frac{\cos 2t+1}{2}dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C_2$

$=\frac{1}{2}\arcsin(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}+C_2$

$=\frac{1}{2}\arcsin(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2}+C_2;$

当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=x\ln(x-1),\int f(x)dx=\int x\ln(x-1)dx=\frac{1}{2}\int\ln(x-1)dx^2$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}dx=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int(x+1+\frac{1}{x-1})dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(x-1)+C_3=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C_3.$

根据 $\int f(x)dx$ 在 $x=0,2$ 处的连续性，令 $C=C_1$, 则可得 $C_2=C_1+\frac{\pi}{4}-1=\frac{\pi}{4}-1+C, C_3=2+\frac{\pi}{4}+C_2=\frac{\pi}{2}+1+C.$

$$\int f(x)dx=\begin{cases} -(x+1)e^{-x}+C, & x\leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\arcsin(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\frac{\pi}{4}-1+C, & 0<x<2, \\ \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}+1+C, & x\geqslant 2, \end{cases}$$

三、 设 $F'(x)=f(x), x\geqslant 0$ 时成立 $f(x)F(x)=\sin^2 x$，且 $F(x)\geqslant 0, F(0)=1$，求 $f(x)$.

解 因为 $F'(x)=f(x)$ 且 $f(x)F(x)=\sin^2 x$，故 $F'(x)F(x)=\sin^2 x$，即 $\frac{1}{2}dF^2(x)=\sin^2 xdx$, 于是

$\frac{1}{2}F^2(x)=\int\sin^2 xdx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$, 即 $F^2(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x+2C$. 又由 $F(0)=1$ 知 $C=\frac{1}{2}$, 而 $F(x)\geqslant 0$,故 $F(x)=\sqrt{x-\frac{1}{2}\sin 2x+1}$. $f(x)=F'(x)=\frac{1-\cos 2x}{2\sqrt{x-\frac{1}{2}\sin 2x+1}}=\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-\frac{1}{2}\sin 2x+1}}, x\geqslant 0.$

20 定积分的概念与性质、微积分基本公式 (1),(2)

一、 用定积分定义，计算 $\int_a^b(x+1)dx \quad (a<b)$.

解 令 $f(x)=x+1$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 将 $[a,b]n$ 等分，分点为 $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a), i=1,2,\cdots,n-1$. 每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$, 于是 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i+1)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+1)\Delta x_i$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}(a+\frac{i}{n}(b-a)+1)\frac{b-a}{n}=(a+1)(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}i=(a+1)(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}$

$=(a+1)(b-a)+\frac{(b-a)^2(n+1)}{2n}$

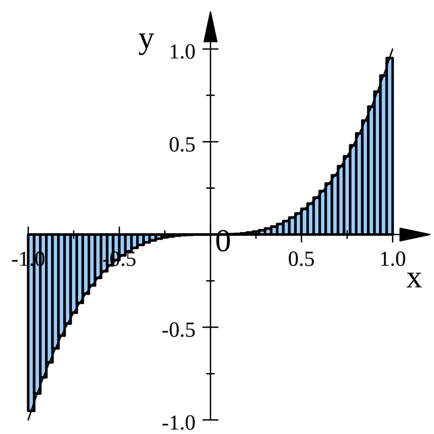
于是，$\int_a^b(x+1)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim\limits_{n\to\infty}((a+1)(b-a)+\frac{(b-a)^2(n+1)}{2n})$

$= (a+1)(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b-a}{2}(a+b+2).$

二、 用定积分的几何意义画图说明等式成立的理由.

1. $\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$;

解 x^3

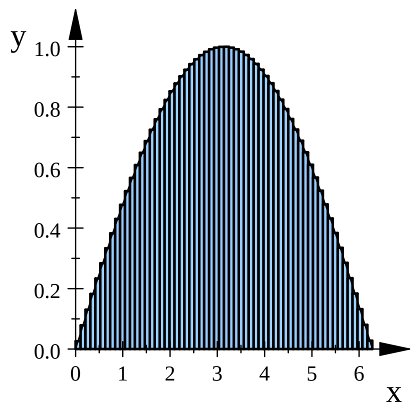


$y = x^3$ 的曲边梯形面积

$f(x) = x^3$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，图形关于原点对称. 在关于原点对称的区间 $[-1,1]$ 上的所包围的面积等于区间 $[0,1]$ 上所包围的面积与区间 $[0,1]$ 上所包围的面积之差，等于零.

2. $\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{2} dx = 2\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2} dx$;

解 $\sin\frac{x}{2}$

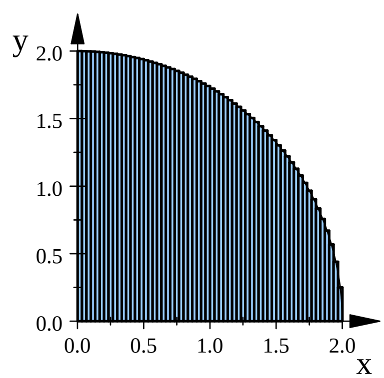


$y=\sin\frac{x}{2}$ 的曲边梯形面积

$f(x)=\sin\frac{x}{2},x\in[0,2\pi]$. 由于 $\sin\frac{\pi+x}{2}=\sin\frac{\pi-x}{2}$, 故图形关于 $x=\pi$ 对称，于是 $\int_0^{2\pi}\sin\frac{x}{2}dx=2\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx$.

3. $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\pi$.

解 $\sqrt{4-x^2}$



$y=\sqrt{4-x^2}$ 的曲边梯形面积

$f(x)=\sqrt{4-x^2},x\in[0,2]$ 的图形是半径为 2 的四分之一圆. 面积 $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\frac{1}{4}\pi 2^2=\pi$.

三、 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续非负，且有 $f(x_0)>0,x_0\in[a,b]$，证明 $\int_a^b f(x)>0$.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续非负，且有 $f(x_0)>0, x_0\in[a,b]$，故必有 $\delta>0$, 使得 $\mathring{U}(x_0,\delta)\subset[a,b]$, 且对任意的 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta), f(x)>0$. 从而由积分中值定理，必有 $\xi\in\mathring{U}(x_0,\delta)\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx=f(\xi)2\delta>0$. 于是 $\int_a^b f(x)=\int_a^{x_0-\delta}f(x)+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)+\int_{x_0+\delta}^{b}f(x)\geqslant 0+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)+0>0.$

四、 不计算比较 $\int_1^2 x^4dx$ 与 $\int_1^2 x^5dx$ 的大小，并说明严格不等式成立的理由.

证明 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$x^4\leqslant x^5$, 则 $f(x)=x^5-x^4\geqslant 0$, 且有 $x_0=\frac{3}{2}, f(x_0)>0$, 于是由前一题，知 $\int_1^2 f(x)>0$, 即 $\int_1^2 x^4dx<\int_1^2 x^5dx$.

五、 计算下列函数的导数：

1. $\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$.

   解 令 $f(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt, f'(x)=\sqrt{1+x^4}(2x)=2x\sqrt{1+x^4}$.

2. $\int_{x^3}^{8}\frac{1}{\sqrt{2+t^2}}dt$;

   解 $f(x)=\int_{x^3}^{8}\frac{1}{\sqrt{2+t^2}}dt=-\int_8^{x^3}\frac{1}{\sqrt{2+t^2}}dt, f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2+x^6}}3x^2=-\frac{3x^2}{\sqrt{2+x^6}}$.

3. $\int_{e^{3x}}^{\cos 2x}\sin t^2dt$.

   解 $f(x)=\int_{e^{3x}}^{\cos 2x}\sin t^2dt=-\int_0^{e^{3x}}\sin t^2dt+\int_0^{\cos 2x}\sin t^2dt$,

   $f'(x)=-(\sin e^{6x})e^{3x}\cdot 3+(\sin(\cos^2 2x))(-2\sin 2x)=3e^{3x}\sin e^{6x}-2\sin 2x\cdot\sin(\cos^2 2x)$.

六、 求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{x^2}$;

   解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cos x^4}{2x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{-t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

   解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{-t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt}{xe^{2x^2}}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{-t^2}dx}{xe^{3x^2}}$

   $=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}}{e^{3x^2}+6x^2e^{3x^2}}=2$.

七、 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导且 $f'(x)\geqslant 0$, 令 $F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$, 证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\geqslant 0$.

证明 因为 $F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}=\frac{\int_a^x f(x)dt-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}=\frac{\int_a^x (f(x)-f(t))dt}{(x-a)^2}$, 又因 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导且 $f'(x)\geqslant 0$, 故 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加，从而当 $x\in(a,b),t\in(a,x)\subset(a,b)$ 时 ,$f(x)-f(t)\geqslant 0,\int_a^x (f(x)-f(t))dt\geqslant 0$，故 $F'(x)\geqslant 0$.

21 微积分基本公式 (3)、定积分的换元法和分部积分法 (1)

一、 计算下列定积分：

1. $\int_1^{64}\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})dx$;

   解 $\int_1^{64}\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}})\Big|_1^{64}=-\frac{25\,604}{33}$.

2. $\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx$;

   解 $\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos xdx$

   $=\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\sin x|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=1-(-2)+1=4.$

3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 xdx$;

   解 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 xdx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x-1)dx=(\tan x-x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{12}-1.$

   或 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 xdx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin xd\frac{1}{\cos x}=\tan x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}dx=(\tan x-x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{12}-1.$

4. $\int_0^2 f(x)dx$, 其中 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geqslant 1, \\ \frac{1}{2}x^2, & x<1; \end{cases}$

   解 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{2}x^2dx+\int_1^2(x+1)dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^1+(\frac{1}{2}x^2+x)\Big|_1^2=\frac{8}{3}.$

二、 计算下列定积分：

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+\frac{\pi}{4})dx$;

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+\frac{\pi}{4})dx = -\cos(x+\frac{\pi}{4})\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}.$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$;

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$

3. $\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$;

解 $\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int_1^{e^3} \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}} d\ln x$

$= \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+u}} du = 2\sqrt{1+u}\big|_0^3 = 2.$

4. $\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}+1} dx$;

解 $\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}+1} dx \overset{u=\sqrt{1-x}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{u+1}(-2u)du$

$= -2\int_{\frac{1}{2}}^0 (1-\frac{1}{u+1})du = -2(u-\ln(u+1))\big|_{\frac{1}{2}}^0 = 1-2\ln\frac{3}{2}.$

5. $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx$;

解 $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx \overset{x=\frac{1}{u}}{=} \int_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{\frac{1}{u^2}\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}(-\frac{1}{u^2})du$

$= -\int_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} du = -\frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} d(1+u^2)$

$= -\sqrt{1+u^2}\Big|_{\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

或 $\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx \underset{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\overset{x=\tan t}{=}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t\cdot\sec t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = -\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$
$2-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

6. $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2} dx.$

解 $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2} dx \overset{x=3\sin u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9\sin^2 u)(3\cos u)3\cos u du$

$= 81\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u du = \frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4x}{2} du$

$= \frac{81}{4}(\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}\sin 4u)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81}{16}\pi.$

三、 设 $f(x)$ 是连续函数，求证：$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx$, 并求 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

证明因为 $\int_0^a f(2a-x)dx = \int_{2a}^a f(t)d(-t) = \int_a^{2a} f(t)dt = \int_a^{2a} f(x)dx$, 故
$\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx = \int_0^{2a} f(x)dx$. 于是，
$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$
$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi \arctan(\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi^2}{4}$.

22 定积分的换元法和分部积分法 (2)、反常积分

一、 计算下列定积分：

1. $\int_0^2 xe^x dx$;

   解 $\int_0^2 xe^x dx = \int_0^2 xde^x = xe^x|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = (xe^x - e^x)|_0^2 = e^2 + 1$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} t\sin\omega t dt$;

   解 $\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} t\sin\omega t dt = -\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} td\cos\omega t = -\frac{1}{\omega}t\cos\omega t|_0^{\frac{\pi}{2\omega}} + \frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos\omega t dt$
   $= \frac{1}{\omega^2}\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} d\sin\omega t = \frac{1}{\omega^2}\sin\omega t\Big| |_0^{\frac{\pi}{2\omega}} = \frac{1}{\omega^2}$.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos 2x dx$;

   解 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x de^x = e^x\cos 2x|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx$
   $= -1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x de^x = -1 + 2e^x\sin 2x|_0^{\frac{\pi}{4}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\cos 2x dx$
   $= -1 + 2e^{\frac{\pi}{4}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\cos 2x dx$,
   从而，$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\cos 2x dx = \frac{2}{5}e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{5}$.

4. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}dx$.

   解 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx + \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$
   $= -2\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x d\sqrt{x} + 2\int_1^e \ln x d\sqrt{x}$
   $= -2\sqrt{x}\ln x|_{\frac{1}{e}}^{1} + 2\int_{\frac{1}{e}}^{1} x^{-\frac{1}{2}}dx + 2\sqrt{x}\ln x|_1^e - 2\int_1^e x^{-\frac{1}{2}}dx$
   $= -2\sqrt{x}\ln x|_{\frac{1}{e}}^{1} + 4x^{\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + 2\sqrt{x}\ln x|_1^e - 4x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^e$

$=8-6e^{-\frac{1}{2}}-2e^{\frac{1}{2}}.$

二、 计算 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx.$

解 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=\int_0^1 \ln(1+x)d(\frac{1}{2-x})=\frac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{1}{(2-x)(1+x)}dx=\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x})dx=\frac{\ln 2}{3}.$

三、 求 $I=\int_0^{2\pi} x|\sin x|\,dx.$

解 $I=\int_0^{2\pi} x|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi} x\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx=\int_0^{\pi} x\sin x dx-\int_{\pi}^{0}(2\pi-x)\sin(2\pi-x)d(2\pi-x)=2\pi\int_0^{\pi}\sin x dx=4\pi.$

四、 判断下列反常积分的敛散性，若收敛，计算广义积分的值：

1. $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos\omega t dt \quad (p,\omega>0);$

   解 $\int_0^{x} e^{-pt}\cos\omega t dt=\frac{1}{p^2+\omega^2}e^{-pt}(\omega\sin\omega t-p\cos\omega t)\Big|_0^x$
   $=\frac{1}{p^2+\omega^2}e^{-px}(\omega\sin\omega x-p\cos\omega x)+\frac{p}{p^2+\omega^2},(p,\omega>0).$
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{x} e^{-pt}\cos\omega t dt=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{p^2+\omega^2}e^{-px}(\omega\sin\omega x-p\cos\omega x)+\frac{p}{p^2+\omega^2})$
   $=\frac{1}{p^2+\omega^2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\omega\sin\omega x-p\cos\omega x}{e^{px}}+\frac{p}{p^2+\omega^2}=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$
   故 $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos\omega t dt=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$
   说明：$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)+C.$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+6}dx;$

   解 $\int\frac{1}{x^2+4x+6}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{1+(\frac{x+2}{\sqrt{2}})^2}d(\frac{x+2}{\sqrt{2}})=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}}+C,$
   $\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^0\frac{1}{x^2+4x+6}dx=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}}\Big|_t^0=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{4},$
   $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{x^2+4x+6}dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}}\Big|_0^t=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2},$
   $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+6}dx=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$

3. $\int_0^1 \frac{x}{1-x^2}dx$;

解 $\int \frac{x}{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| + C$,

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| = \infty$, 故 $\int_0^1 \frac{x}{1-x^2}dx$ 发散.

4. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{|1-x|}}dx$.

解 $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{|1-x|}}dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx + \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = -2\int_0^1 xd\sqrt{1-x} + 2\int_1^2 xd\sqrt{x-1}$

$= -2\,x\sqrt{1-x}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \sqrt{1-x}dx + 2\,x\sqrt{x-1}\Big|_1^2 - 2\int_1^2 \sqrt{x-1}dx$

$= 4 - \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = 4.$

五、 证明：$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

证明 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{d(\frac{1}{u})}{1+(\frac{1}{u})^4} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2du}{1+u^4} =$

$\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2} + \frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2})dx = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-\sqrt{2}x+x^2} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{2}x+x^2} =$

$\frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} =$

$\frac{1}{4}\sqrt{2}[\arctan(\sqrt{2}x-1) + \arctan(\sqrt{2}x+1)]\Big|_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$

23 第五章习题课

一、 设 $2x - \tan(x-y) = \int_0^{x-y}\sec^2 t dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 利用隐函数求导方法，有 $2 - \sec^2(x-y)(1-y') = \sec^2(x-y)(1-y')$, 故

$y' = 1 - \frac{1}{\sec^2(x-y)} = \sin^2(x-y).$

二、 设 $f(x) = x, g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 当 $x \geqslant 0$ 时，求.$F(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$.

解 因为 $f(x)=x, g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$，故当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时，$g(x)=0$，从而 $F(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)dt \overset{t=x-u}{=} -\int_x^0 f(x-u)g(u)du \overset{t=x-u}{=} \int_0^x f(x-u)g(u)du$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-u)g(u)du+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(x-u)g(u)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-u)g(u)du+0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-u)\sin u du=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-u)d\cos u=x-1$;

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$F(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)dt=F(x)=\int_0^x t\sin(x-t)dt=\int_0^x td\cos(x-t)=t\cos(x-t)|_0^x-\int_0^x\cos(x-t)dt$

$=t\cos(x-t)|_0^x+\sin(x-t)|_0^x=x-\sin x.$

于是，$F(x)=\begin{cases}x-\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ x-1, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

三、 计算下列定积分：

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx$;

   解 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx$

   $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx=-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

   说明：$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx=\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

2. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\arccos x dx$;

   解 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\arccos x dx=x\arccos x\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x}{-\sqrt{1-x^2}}dx$

   $=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

   $=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1.$

3. $\int_0^{\ln x}\sqrt{e^{2x}-1}dx$;

   解 $\int_0^{\ln x}\sqrt{e^{2x}-1}dx \overset{t=\sqrt{e^{2x}-1}}{=} \int_0^{\sqrt{3}} t\frac{t}{1+t^2}dt=\int_0^{\sqrt{3}}(1-\frac{1}{1+t^2})dt$

   $=(t-\arctan t)|_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$

4. $\int_0^3 [x]xdx$, 其中 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数.

解 $\int_0^3 [x]xdx = 0+\int_1^2 xdx+\int_2^3 2xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 + x^2\Big|_2^3 = \frac{13}{2}$.

四、 计算 $\int_{-3}^3(|x|+x)e^{-|x|}dx$.

解 $\int_{-3}^3(|x|+x)e^{-|x|}dx = \int_{-3}^0(-x+x)e^x dx+\int_0^3(x+x)e^{-x}dx$

$= -2\int_0^3 xde^{-x} = -2xe^{-x}\Big|_0^3+2\int_0^3 e^{-x}dx = -6e^{-3}-2e^{-x}\Big|_0^3 = -8e^{-3}+2$.

五、 证明：$1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{\pi}{2}$.

证明 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有 $0<\sin x<x<\tan x$.

故 $0<\frac{\sin x}{x}<1$, 于是由以前题目结论，有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{\sin x}{x})dx>0$, 即 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{\pi}{2}$.

当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}, f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{x-\tan x}{x^2\cos x}<0$, 即 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 单调减少，故 $f(x)$ 的最小值为 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$, 即 $\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{2}{\pi}$, 当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时取不到等号，故有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi})dx>0$, 即 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx>1$. 故 $1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{\pi}{2}$.

六、 已知 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt$, 求 $f(2)+f(\frac{1}{2})$.

解 因为 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt$，故 $f(x)+f(\frac{1}{x})=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}dt$

$=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^x\frac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}(-\frac{1}{u^2})du=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^x\frac{\ln u}{u(1+u)}du$

$=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^x\frac{\ln t}{t(1+t)}dt=\int_1^x(\frac{\ln t}{1+t}+\frac{\ln t}{t(1+t)})dt$

$=\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt=\frac{1}{2}\ln^2 t\Big|_1^x=\frac{1}{2}\ln^2 x$.

故 $f(2)+f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\ln^2 2$.

七、 设 n 为自然数，求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$.

解 因为 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$, 故 $I_0=\frac{\pi}{4}, I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=-\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$.

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}xd\tan x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}xdx$

$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I_{n-2}=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$, 所以，$I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}\quad(n\geqslant 2)$.

$n=2k,k\in\mathbb{N}^*$ 时，$I_n=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k-3}+\frac{1}{2k-5}-\frac{1}{2k-7}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-(2k-1)}+(-1)^k I_0$

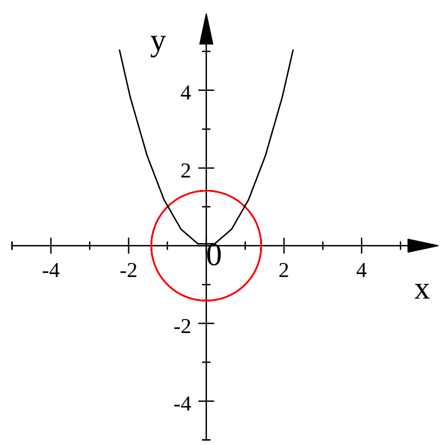
$n=2k+1,k\in\mathbb{N}^*$ 时,$I_n=\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k-2}+\frac{1}{2k-4}-\frac{1}{2k-6}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{(2k+1)-(2k-1)}+(-1)^k I_1$

24　定积分的元素法、定积分在几何学上的应用 (1),(2)

一、　求下列曲线所围成的图形的面积：

1. $y=x^2$ 与 $x^2+y^2=2$ (两部分面积都要计算);

解　$x^2,x^2+y^2=2$



$y=x^2$ 与 $x^2+y^2=2$ 围成的区域

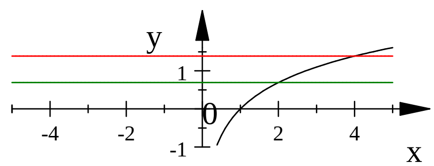
两曲线 $\begin{cases} y=x^2, \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ 的交点：$x_1=1,y_1=1,x_2=-1,y_2=1$.

所求上半部分面积：$S_1=\int_{-1}^{1}(\sqrt{2-x^2}-x^2)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$;

下半部分面积：$S_2=\pi(\sqrt{2})^2-S_1=\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{3}$.

2. $y=\ln x, y$ 轴与直线 $y=\ln 2, y=\ln 4$.

解 $\ln x, \ln 2, \ln 4$



$y=\ln x$ 及其它直线围成的区域

两曲线 $\begin{cases} y=\ln x, \\ y=\ln 2 \end{cases}$ 的交点：$x=2, y=\ln 2$;

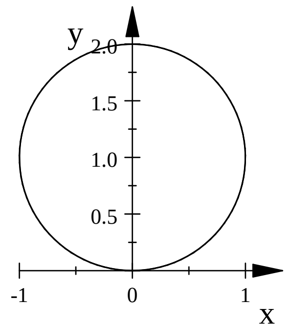
两曲线 $\begin{cases} y=\ln x, \\ y=\ln 4 \end{cases}$ 的交点：$x=4, y=\ln 4$.

所求面积 $S=4\ln 4-2\ln 2-\int_2^4 \ln x dx=2$.

二、 求下列曲线所围成的图形的面积：

1. $\rho=2a\sin\theta \quad (a>0)$;

解 $\rho=2\sin\theta$

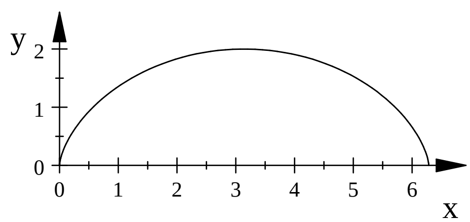


圆

所求面积 $S=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(2a\sin\theta)^2d\theta=2a^2\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta=\pi a^2$.

2. ★$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi \quad (a>0)$.

解 $\Big(\ (t-\sin t) \quad (1-\cos t)\ \Big)$



摆线

所求面积 $S=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=3\pi a^2$.

说明：参数方程 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, 与 $x(\alpha)=a, y(\beta)=b$ 所包围的面积为 $\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$.

另解 $dS=ydx, S=\int_0^{2\pi a}ydx$. 又 $x=a(t-\sin t)$, 则 $dx=a(1-\cos t)dt$. 当 x 从 0 变到 $2\pi a, t$ 从 0 变到 2π, 故 $S=\int_0^{2\pi}a(1-$

$\cos t)a(1-\cos t)dt = 3\pi a^2$.

三、 将抛物线 $y^2 = 2px \quad (p>0)$ 及 $x = x_0 \quad (x_0 > 0)$ 所围成的图形绕 x 轴旋转，计算所得旋转体的体积.

解 $V = \int_0^{x_0} \pi(\sqrt{2px})^2 dx = 2\pi p \int_0^{x_0} x dx = \pi p x_0^2$.

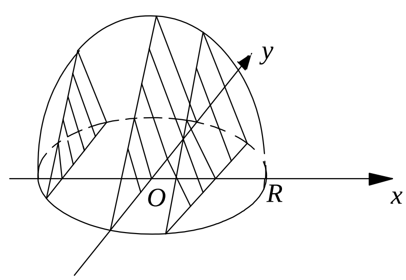
四、 求由曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}, y = 0, x = 4$ 所围图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 $V = \int_a^b x f(x) dx = \int_0^4 x \cdot x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{256}{7}$.

说明：由平面图形 $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为 $V = \int_a^b x f(x) dx$.

五、 计算底面是半径为 R 的圆，而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积.

解 如图所示，



面积元素法求体积

底面圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$，过 x 轴上的点作垂直于 x 轴的截面是边长为 $2\sqrt{R^2 - x^2}$ 的正三角形，其高为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{R^2 - x^2}$，所以截面 $S(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{R^2 - x^2} \times \sqrt{3}\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{3}(R^2 - x^2), dV = S(x)dx$. 由对称性知，所求体积为 $V = \int_{-R}^{R} S(x) dx = 2\int_0^R \sqrt{3}(R^2 - x^2) dx = \frac{4}{3}\sqrt{3}R^3$.

六、 记 $V(\xi)$ 为曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2},y=0,x=0,x=\xi$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积，求 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$.

解 $V(\xi)=\int_0^\xi\pi(\frac{\sqrt{x}}{1+x^2})^2dx=\int_0^\xi\pi\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\xi\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\pi\frac{\xi^2}{\xi^2+1},\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\lim\limits_{\xi\to+\infty}(\frac{1}{2}\pi\frac{\xi^2}{\xi^2+1})=\frac{\pi}{2}$.

25 定积分在几何学上的应用 (3)、第六章习题课

一、 求曲线 $y=\ln\cos x\quad(0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2})$ 的弧长.

解 $y=\ln\cos x,y'=-\frac{\sin x}{\cos x},s=\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^a\frac{1}{\cos x}dx=\ln\left|\frac{1+\sin a}{\cos a}\right|$.

二、 在摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\y=a(1-\cos t),\end{cases}t\in[0,2\pi]\quad(a>0)$ 上求分摆线第一拱成 3: 1 的点的坐标.

解 $t_0\in[0,2\pi]$ 时 ,$s(t_0)=\int_0^{t_0}\sqrt{x\prime^2(t)+y\prime^2(t)}dt=\int_0^{t_0}\sqrt{(a-a\cos t)^2+(a\sin t)^2}dt$

$=a\int_0^{t_0}\sqrt{2(1-\cos t)}dt=2a\int_0^{t_0}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=4a(1-\cos\frac{t_0}{2})$.

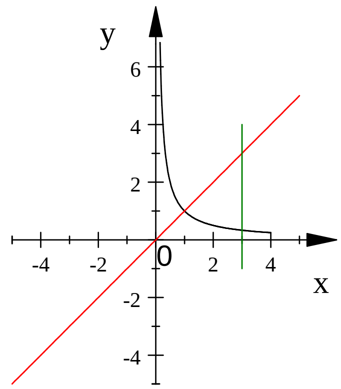
$t_0=2\pi$ 时，,$s(2\pi)=4a(1-\cos\frac{t_0}{2})|_{t_0=2\pi}=8a$. 设点 $P(x_0,y_0)$ 分摆线第一拱成 3: 1, 对应的参数为 t_0，则 $4a(1-\cos\frac{t_0}{2})=6a$, 得 $\cos\frac{t_0}{2}=-\frac{1}{2}$，$t_0=\frac{4\pi}{3}$, 故 $x_0=a(\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{4\pi}{3})=a\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right),y_0=a(1-\cos\frac{4\pi}{3})=\frac{3}{2}a,P(a\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\frac{3}{2}a)$.

三、 设曲线 $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}dt,x\in[0,\pi]$，求曲线之长.

解 $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}dt,y'=\sqrt{\sin x},s=\int_0^\pi\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^\pi\sqrt{1+\sin x}dx=\int_0^\pi(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})dx=4$.

四、 求 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=3$ 所围图形的面积.

解 $\frac{1}{x},x,(3,4,3,-1)$

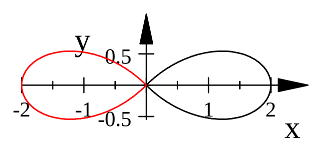


$y=\frac{1}{x}$ 及其它直线围成的区域

$y=\frac{1}{x}$ 与 $y=x$ 的交点为 $P(1,1), x=3$ 与 $y=x$ 的交点为 $Q(3,3)$, 故所求面积为 $S=\int_1^3(x-\frac{1}{x})dx=4-\ln 3$.

五、 求双纽线 $\rho^2=a^2\cos 2\varphi \quad (a>0)$ 所围图形的面积.

解 双纽线 $\rho^2=2\cos 2\varphi$ 在 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 及 $[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$ 的图形：

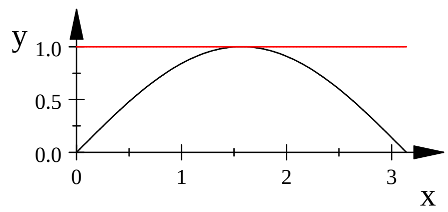


双纽线

$S=4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2 d\varphi=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=a^2.$

六、 求 $y=\sin x, y=0 \quad (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 所围图形分别绕 x 轴、y 轴旋转所得旋转体的体积.

解 $\sin x, 1$



$y=\sin x$ 绕 x 轴或 y 轴旋转

绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 $V_x=\int_0^{\pi}\pi\sin^2 x dx=\frac{\pi^2}{2}$;

绕 y 轴旋转所得旋转体的体积 $V_y=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x dx=2\pi^2$.

或 $V_y=\int_0^1\pi(\frac{\pi}{2}+\arccos y)^2dy-\int_0^1\pi\arcsin^2 y dy$

$=\frac{1}{4}\pi\left(8\pi+\pi^2-8\right)-\frac{1}{4}\pi\left(\pi^2-8\right)=2\pi^2$.

说明：由平面图形 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为 $V=\int_a^b xf(x)dx$.

26 向量及其基本运算 (1),(2),(3),(4)

一、 设 $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}, \vec{v}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$，试用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示 $2\vec{u}-4\vec{v}$.

解 $2\vec{u}-4\vec{v}=2(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})-4(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=-10\vec{b}-2\vec{c}$.

二、 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为三个模为 1 的单位向量，且有 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ 成立，证明：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 可构成一个等边三角形.

解 因为 $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=|\vec{c}|=1$, 故 $\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=1$. 又 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, 故 $\vec{c}=-(\vec{a}+\vec{b})$. 于是 $\vec{c}^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$, 即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$, 同理可得 $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{1}{2}$, 于是用有向线段分别表示向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，这些有向线段首未尾相连时形成三角形，且是一个等边三角形.

三、 将 $\triangle ABC$ 的 BC 边四等分，设分点依次为 D_1,D_2,D_3，再将各分点与点 A 连接，试以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{c},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A},\overrightarrow{D_2A}$ 和 $\overrightarrow{D_3A}$.

解 $\overrightarrow{D_1A}=-(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\_=-(\overrightarrow{c}+\frac{1}{4}\overrightarrow{a}),\overrightarrow{D_2A}=-(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})=-(\overrightarrow{c}+\frac{1}{2}\overrightarrow{a})$,

$\overrightarrow{D_3A}=-(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC})=-(\overrightarrow{c}+\frac{3}{4}\overrightarrow{a})$.

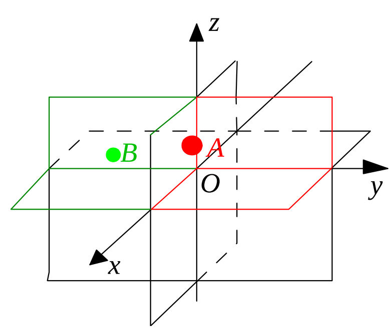
四、 已知两点 $M_1(1,2,3),M_2(1,-2,-1)$，试用坐标表达式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-3\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-2,-1)-(1,2,3)=(0,-4,-4),-3\overrightarrow{M_1M_2}=-3(0,-4,-4)=(0,12,12)$.

五、 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?并画出前两个:$A(1,1,1),B(2,-1,1),$

$C(-2,-3,-4),D(-3,4,-5)$.

解 $A(1,1,1),B(2,-1,1),C(-2,-3,-4),D(-3,4,-5)$ 的卦限分别为 I,IV,VII,VI.A 点、B 点所在有卦限分别在红色、绿色区域.



点所在的卦限

六、 指出下列各点的位置,观察其所具有的特征,并总结出一般规律:$A(3,4,0),B(4,0,3),$

$C(-1,0,0),D(0,8,0)$.

解 在坐标平面上，点的坐标分量有一个为零；在坐标轴上，点的坐标分量有两个为零.

七、 求点 (x,y,z) 关于：(1) 各坐标面；(2) 各坐标轴；(3) 坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 各坐标面：关于 xOy 平面，$(x,y,-z)$. 关于 yOz 平面，$(-x,y,z)$. 关于 zOx 平面，$(x,-y,z)$.

(2) 各坐标轴：关于 x 轴，$(x,-y,-z)$. 关于 y 轴，$(-x,y,-z)$. 关于 z 轴，$(-x,-y,z)$.

(3) 坐标原点 O 的对称点的坐标:$(-x,-y,-z)$.

27 向量及其线性运算 (5)、数量积与向量积

一、 试证明以三点 $A(10,-1,6),B(4,1,9),C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

解 $\overrightarrow{AB}=(4,1,9)-(10,-1,6)=(-6,2,3),\overrightarrow{AC}=(2,4,3)-(10,-1,6)=(-8,5,-3),\overrightarrow{BC}=(2,4,3)-(4,1,9)=(-2,3,-6).\overrightarrow{AB}^2=49,$

$\overrightarrow{AC}^2=98,\overrightarrow{BC}^2=49$, 故 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}^2$ 且 $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BC}\|$，即 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

二、 设已知两点 $M_1(5,\sqrt{2},2)$ 和 $M_2(4,0,3)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角，并求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向一致的单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(4,0,3)-(5,\sqrt{2},2)=(-1,-\sqrt{2},1),\|\overrightarrow{M_1M_2}\|=\|(-1,-\sqrt{2},1)\|$

$=2$, 方向余弦：$\cos\alpha=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{-\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2}$, 方向角：$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{3\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$. 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向一致的单位向量 $\overrightarrow{e}=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|}=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$.

三、 设 $\overrightarrow{m}=2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k},\overrightarrow{n}=4\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ 及 $\overrightarrow{p}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$，求 $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{m}+3\overrightarrow{n}-2\overrightarrow{p}$ 在 x 轴上的投影及在 z 轴上的分向量.

解 $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{m}+3\overrightarrow{n}-2\overrightarrow{p}=2(2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k})+3(4\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k})-2(-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k})=(4+12+2)\overrightarrow{i}+(6-3-4)\overrightarrow{j}+(8+6-6)\overrightarrow{k}$

$=18\overrightarrow{i}-1\overrightarrow{j}+8\overrightarrow{k}.\overrightarrow{a}$ 在 x 轴上的投影为 18，在 z 轴上的分向量为 $8\overrightarrow{k}$.

四、 已知 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 为三个模为 1 的单位向量，且 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，求 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$ 的值.

解 因为 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 为三个模为 1 的单位向量，故 $\overrightarrow{a}^2=\overrightarrow{b}^2=\overrightarrow{c}^2=1$. 又 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，故 $\overrightarrow{b}=-(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}),\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=-(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})^2+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$

$=-\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}-\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=-2-\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$, 同理可得，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=-2-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=-2-\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$, 于是，$3(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})=(-2-\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})+(-2-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})+(-2-\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})$, 从而 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=-\frac{3}{2}$.

五、 已知 $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ 和 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$, 计算：

1. $(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}$;

   解 $(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})=(2\times1+3\times(-1)+1\times(-1))(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})-(2\times1+3\times1+1\times0)(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})$
   $=2(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})-5(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})=-3\overrightarrow{i}+7\overrightarrow{j}+7\overrightarrow{k}$.

2. $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$;

   解 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=(2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}+\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})\times(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}+\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$
   $=(3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j})\times(2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k})=\begin{vmatrix}2&0\\0&-1\end{vmatrix}\overrightarrow{i}+\begin{vmatrix}0&3\\-1&2\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}3&2\\2&0\end{vmatrix}\overrightarrow{k}=-2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k}$.

3. $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}$.

解 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=(\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\overrightarrow{i}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\overrightarrow{k})\cdot$
$\overrightarrow{c}=(-2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-5\overrightarrow{k})\cdot(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$
$=(-2)\times1+3\times1+(-5)\times0=1.$

六、 设 $\overrightarrow{a}=(2-1,3),\overrightarrow{b}=(-1,2,-1)$, 问 λ 和 μ 满足何关系时，可使 $\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{b}$ 与 z 轴垂直?

解 $\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{b}=\lambda(2-1,3)+\mu(-1,2,-1)=(2\lambda-\mu,-\lambda+2\mu,3\lambda-\mu),\overrightarrow{k}=(0,0,1)$,

$\left(\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{k}=3\lambda-\mu=0$ 时，即 $\mu=3\lambda$ 时，$\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{b}$ 与 z 轴垂直.

七、 已知 $\overrightarrow{OA}=(1,2,3),\overrightarrow{OB}=(2,-1,1)$, 求 $\triangle AOB$ 的面积.

解 因为 $\overrightarrow{OA}=(1,2,3),\overrightarrow{OB}=(2,-1,1)$, 故 $\|\overrightarrow{OA}\|=\|(1,2,3)\|=\sqrt{14},\|\overrightarrow{OB}\|=\|(2,-1,1)\|=\sqrt{6}$,

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(1,2,3)\cdot(2,-1,1)=3,S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\|=\frac{1}{2}\|(1,2,3)\times(2,-1,1)\|=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(或 $\cos\angle AOB=\cos\left\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|}=\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{21}}{14},\sin\angle AOB=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{21}}{14})^2}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$, 于是，$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\sqrt{14}\times\sqrt{6}\times\frac{5\sqrt{7}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.)

28 曲面及其方程

一、 设动点 P 与两定点 $A(1,2,3),B(3,0,7)$ 等距离，求动点 P 的轨迹方程.

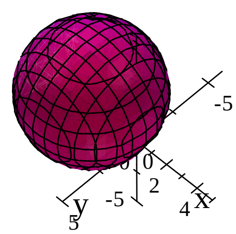
解 设 $P(x,y,z)$, 则 $|PA|=|PB|$, 从而 $|PA|^2-|PB|^2=0$ 即动点 P 的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-((x-3)^2+y^2+(z-7)^2)=0$, 即

$4x-4y+8z-44=0$, 即 $x-y+2z-11=0$.

二、 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=0$ 表示什么曲面？

解 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=0$, 即 $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=(\sqrt{14})^2$ 是球面.

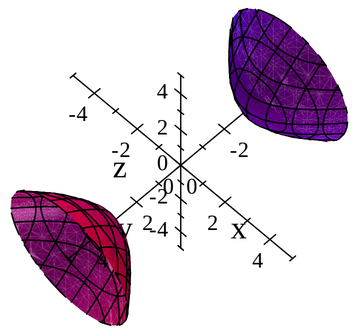
$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=(\sqrt{14})^2$



球

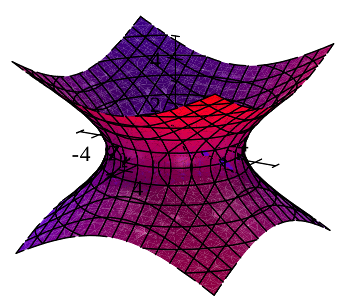
三、 将 xOz 平面上的双曲线 $4x^2-9z^2=36$ 分别绕 x 轴及 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面方程.

解 $4x^2-9z^2=36$ 绕 x 轴旋转所生成的曲面方程为 $4x^2-9(y^2+z^2)=36$, 即 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$



$4x^2-9z^2=36$ 绕 x 轴旋转形成的曲面

$4x^2-9z^2=36$ 绕 z 轴旋转所生成的曲面方程为 $4(x^2+y^2)-9z^2=36$, 即 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$

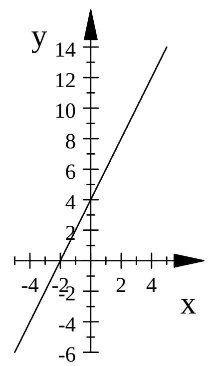


$4x^2-9z^2=36$ 绕 z 轴旋转形成的曲面

四、 指出下列方程在平面解析几何和空间解析几何中分别表示什么图形?

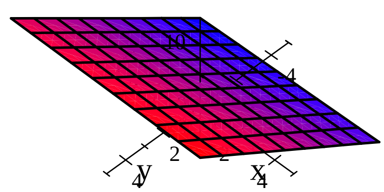
1. $y=2x+4$;

解　平面解析几何中为直线：$y = 2x + 4$



直线

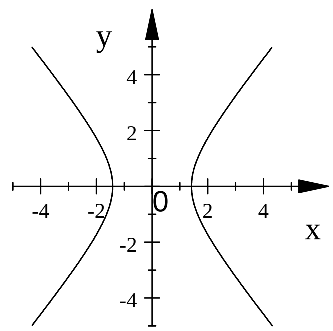
立体解析几何中为平面：$y = 2x + 4$



平面

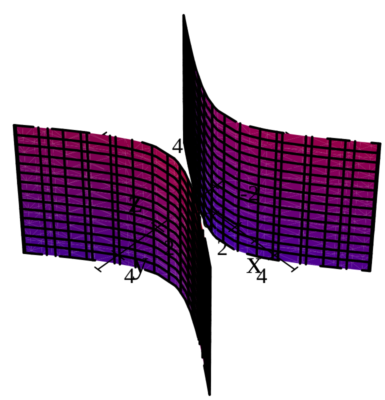
2. $3x^2 - 2y^2 = 6$.

解　平面解析几何中为双曲线：$3x^2 - 2y^2 = 6$



双曲线

立体解析几何中为双曲柱面：$3x^2-2y^2=6$

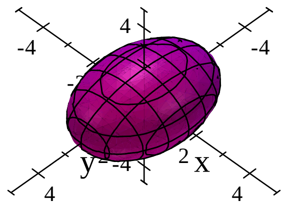


双曲柱面

五、 说明下列旋转曲面是怎样形成的？

1. $x^2+2y^2+2z^2=6$;

解 平面 xOy 上椭圆 $x^2+2y^2=6$ 绕 x 轴旋转而成：$x^2+2y^2+2z^2=6$

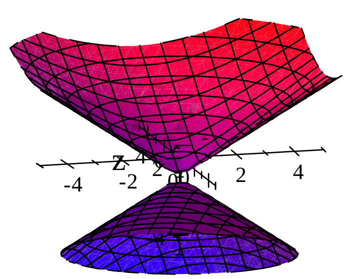


椭球面

2. $(z+a)^2 = x^2 + y^2$.

解　平面 xOz 上曲线 $(z+a)^2 = x^2$ 绕 z 轴旋转而成：$(z+a)^2 = x^2 + y^2$

$(z+1)^2 = x^2 + y^2$

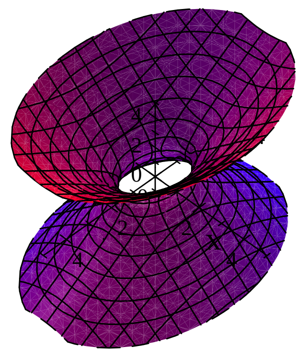


$(z+a)^2 = x^2$ 绕 z 轴旋转所成的曲面

六、 指出下列方程所表示的曲面：

1. $x^2+2y^2-z^2=2$;

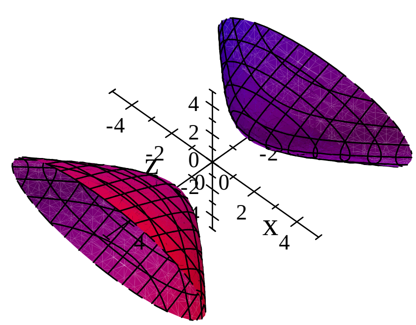
　解　单页双曲面：$x^2+2y^2-z^2=2$



单页双曲面

2. $x^2-y^2-3z^2=3$;

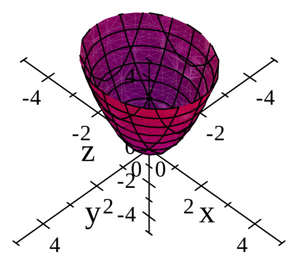
　解　双页双曲面：$x^2-y^2-3z^2=3$



双页双曲面

3. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=\frac{z}{5}$.

解 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=\frac{z}{5}$



椭圆抛物面

29 空间曲线及其方程、平面及其方程 (1)

一、 填空题

1. 曲面 $x^2+y^2-\frac{z^2}{9}=0$ 与平面 $z=3$ 的交线圆的方程是__________，其圆心坐标是__________，圆的半径为__________.

解 (1) 交线圆的方程：$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=3. \end{cases}$ (2) 圆心坐标是 $(0,0,3)$.(3) 半径为 1.

2. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ 在 yOz 面上的投影曲线为__________.

解 由 $x^2+y^2=1$ 得 $x^2=1-y^2$，代入 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$，有 $2-2y+(z-1)^2=1$. 在 yOz 面上的投影，有 $x=0$, 从而投影

曲线为 $\begin{cases} 2y-(z-1)^2=1, \\ x=0. \end{cases}$

3. 螺旋线 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=b\theta \quad (a>0,b>0)$ 在 yOz 面上的投影曲线为________.

解　在 yOz 面上的投影，有 $x=0$, 从而投影曲线为 $\begin{cases} y=a\sin\frac{z}{b}, \\ x=0. \end{cases}$

4. 上半锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2} \quad (0\leqslant z\leqslant 1)$ 在 xOy 面上的投影为________，在 xOz 面上的投影为________，在 yOz 面上的投影为________.

解　(1) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 1, \\ z=0. \end{cases}$ (2) 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}, y^2=z^2-x^2\geqslant 0$, 故 $\begin{cases} |x|\leqslant |z|\leqslant 1, \\ y=0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} |y|\leqslant |z|\leqslant 1, \\ x=0. \end{cases}$

二、 选择题

1. 方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, \\ y=z \end{cases}$ 在空间解析几何中表示 () .

(A) 椭圆柱面　(B) 椭圆曲线

(C) 两个平行平面　(D) 两条平行直线解　椭圆柱面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 平面 $y=z$ 相截得椭圆曲线，选 (B).

2. 参数方程 $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=b\theta \end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 的一般方程是 ()

(A) $x^2+y^2=a^2$　(B) $x=a\cos\frac{z}{b}$

(C) $y=a\sin\frac{z}{b}$　(D) $\begin{cases} x=a\cos\frac{z}{b}, \\ y=b\sin\frac{z}{b}. \end{cases}$

解 $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=b\theta, \end{cases}$ 消去 θ, 得 (D).

3. 平面 $x-2z=0$ 的位置是 ()

(A) 平行 xOz 坐标面　　(B) 平行 Oy 轴

(C) 垂直于 Oy 轴　　(D) 通过 Oy 轴解　y 可取任何值，故通过 Oy 轴，选 (D).

4. 下列平面中通过坐标原点的平面是 ()

(A) $x=1$　　(B) $x+2y+3z+4=0$

(C) $3(x-1)-y+(z+3)=0$　　(D) $x+y+z=1$

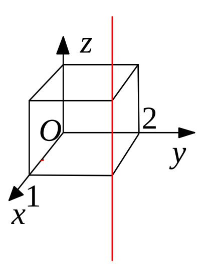
解　$(0,0,0)$ 满足 $3(x-1)-y+(z+3)=0$, 选 (C).

三、 化曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=x \end{cases}$ 为参数方程.

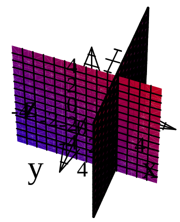
解　由 $y=x$ 及 $x^2+y^2+z^2=9$ 得 $2x^2+z^2=9$. 令 $x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta, z=3\sin\theta$, 从而 $y=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta$，即参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \\ y=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \\ z=3\sin\theta, \end{cases}$ θ 为参数.

四、 画出下列曲线在第一卦限内的图形：

1. $\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$

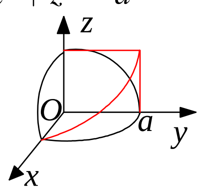
解 

. $x=1, y=2$

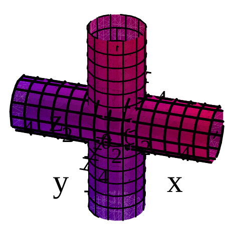


两平面相交于一直线

2. $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2 \end{cases}$ $(a>0)$.

解 

$x^2+y^2=2, x^2+z^2=2$



两圆柱相交形成的立体

五、 求通过三点 $A(1,1,1), B(-2,-2,2)$ 和 $C(1,-1,2)$ 的平面方程.

解 因为 $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,2)-(1,1,1)=(-3,-3,1), \overrightarrow{AC}=(1,-1,2)-(1,1,1)=(0,-2,1)$, 故平面 ABC 的法向量为 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=$

$-\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+6\overrightarrow{k}=(-1,3,6)$. 平面 ABC 的方程：$(-1)(x-1)+3(y-1)+6(z-1)=0$, 即 $x-3y-6z+8=0$.

30 平面及其方程 (2),(3)、空间直线及其方程

一、 填空题

1. 过点 $P(4,-1,3)$ 且平行于直线 $\frac{x-2}{3}=2y=\frac{z-1}{5}$ 的直线方程为____________.

   解　直线 $\frac{x-2}{3}=2y=\frac{z-1}{5}$ 的方向向量为 $(3,\frac{1}{2},5)$, 故所求直线方程为 $\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-3}{5}$.

2. 过点 $P(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+7z=7, \\ 3x+5y-2z=-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程为____________.

   解　$\begin{cases} x-2y+7z=7, \\ 3x+5y-2z=-1 \end{cases}$ 的方向向量为 $\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=-31\overrightarrow{i}+23\overrightarrow{j}+11\overrightarrow{k}$, 故所求直线方程为 $-31(x-2)+23(y-0)+11(z+3)=0$, 即 $31x-23y-11z-95=0$.

3. 过点 $P(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程是____________.

   解　两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 的交线的方向向量 $\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$, 故所求直线方程为 $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$.

4. 当 $m=$______ 时，直线 $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$ 与平面 $mx+3y-5z+1=0$ 平行.

   解　$(4,3,1)\cdot(m,3,-5)=4m+4=0, m=-1$.

二、 选择题

1. 下面直线中平行于 xOy 坐标面的是 ()

(A) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{2}$　(B) $\frac{x+1}{0}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1}$

(C) $\begin{cases}4x-y-4=0,\\ x-z-4=0.\end{cases}$　(D) $\begin{cases}x=1+2t,\\ y=3t,\\ z=4.\end{cases}$

解　直线中平行于 xOy 坐标面即垂直于 z 轴，$\begin{cases}x=1+2t,\\ y=3t,\\ z=4\end{cases}$ 化简为 $\begin{cases}x=1+\frac{2}{3}y,\\ z=4.\end{cases}$ 此直线在平面 $z=4$ 上，与 z 轴垂直，选 (D).

2. 直线 $L:\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 与平面 $\Pi:4x-2y-2z=3$ 的关系是 ()

(A) 平行　(B) 垂直相交　(C) L 在 Π 上　(D) 相交但不垂直解

直线 $L:\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 的方向向量为 $(-2,-7,3)$, 平面 $\Pi:4x-2y-2z=3$ 的法向量为 $(4,-2,-2),(-2,-7,3)\cdot(4,-2,-2)=0$, 选 (A).

3. 设直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{5-y}{2}=\frac{z+8}{1}$ 与直线 $L_2:\begin{cases}x-y=6,\\ 2y+z=3,\end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角的正弦值为 ()

(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{3}$　(D) $\frac{\pi}{2}$

解　直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{5-y}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 的方向向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,-2,1)$, 直线 $L_2:\begin{cases}x-y=6,\\ 2y+z=3\end{cases}$ 的方向向量为 $\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$, 即 $\overrightarrow{n_2}=(-1,-1,2)$. 故 L_1 与 L_2 的夹角为 α, 则 $\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_1}\|\|\overrightarrow{n_2}\|}=\frac{(1,-2,1)\cdot(-1,-1,2)}{\|(1,-2,1)\|\|(-1,-1,2)\|}=\frac{1}{2},\sin\alpha=\sqrt{1-(-\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 选 (B).

4. 两平行线 $x=t+1,y=2t+1,z=t$ 与 $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ 之间的距离是 ()

(A) 1　(B) 2　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

解 两平行线 $x=t+1, y=2t+1, z=t$ 与 $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ 的公垂线方向向量 $(t+1-2, 2t+1-1, t+1)$ 与 $(1,2,4)$ 垂直，故 $(t-1, 2t, t+1)\cdot(1,2,4)=9t+3=0$, 即 $t=-\frac{1}{3}$, 于是所求的距离为 $P(-\frac{1}{3}+1, 2\times(-\frac{1}{3})+1, -\frac{1}{3})$ 与 $Q(2,-1,1)$ 的距离.$\overrightarrow{PQ}=(2,-1,1)-(-\frac{1}{3}+1, 2\times(-\frac{1}{3})+1, -\frac{1}{3})=(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}), \|\overrightarrow{PQ}\|=\|(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3})\|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 选 (D).

三、 设直线 L 通过 $P(1,1,1)$，且与 $L_1: 6x=3y=2z$ 相交，又与 $L_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 垂直，求直线 L 的方程.

解 过 $P(1,1,1)$ 又与 $L_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 垂直的平面 Π 的方程为 $2(x-1)+(y-1)+4(z-1)=0$, 即 $2x+y+4z-7=0$.L_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1}{6}t, \\ y=\frac{1}{3}t, \\ z=\frac{1}{2}t, \end{cases}$ 代入平面的方程，得到 $2\times\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}t+4\times\frac{1}{2}t-7=0, t=\frac{21}{8}$, 则 L_1 与 Π 的交点为 $(\frac{7}{16}, \frac{7}{8}, \frac{21}{16})$, 故 L 的方向向量为 $(\frac{7}{16}-1, \frac{7}{8}-1, \frac{21}{16}-1)=(-\frac{9}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{5}{16})$, 直线 L 的方程为 $\frac{x-1}{9}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-5}$.

四、 求通过 z 轴，且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的平面方程.

解 设过轴的平面方程为 $Ax+By=0$, 法向量为 $(A,B,0)$, 平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$. 法向量为 $(2,1,-\sqrt{5})$. 故 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{(A,B,0)\cdot(2,1,-\sqrt{5})}{\|(A,B,0)\|\|(2,1,-\sqrt{5})\|}=\frac{\sqrt{10}(2A+B)}{10\sqrt{A^2+B^2}}$,

解得 $A=\frac{1}{3}B$ 或 $A=-3B$, 故所求的平面方程为 $x+3y=0$ 或 $3x-y=0$.

五、 求通过点 $P(2,0,-1)$，且又通过直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 的平面方程.

解 令所求平面 Π 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(A,B,C)$, 又直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 的方向向量为 $\overrightarrow{s}=(2,-1,3)$. 则 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{s}=(A,B,C)\cdot(2,-1,3)=2A-B+3C=0$. 由于 $P(2,0,-1)$ 及直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 上的点 $Q(-1,0,2)$ 在平面 Π 上，则 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=(A,B,C)\cdot((-1,0,2)-(2,0,-1))=3C-3A=0$. 解出 $A=C, B=5C$, 于是平面 Π 方程为 $x+5y+z-1=0$.

另解 由于 $P(2,0,-1)$ 及直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 上的点 $Q(-1,0,2)$ 在所求平面 Π 上，故 $\overrightarrow{PQ}=(-1,0,2)-(2,0,-1)=(-3,0,3)$ 及直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 的方向向量为 $\overrightarrow{s}=(2,-1,3)$ 均是平面 Π 内的向量，从而法向量为 $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -3 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=3\overrightarrow{i}+15\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}=3(1,5,1)$, 于是平面 Π 方程为 $x+5y+z-1=0$.

六、 设直线 $L:\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ 与平面 $\Pi:2x+y-z-3=0$.(1) 求证 L 与 Π 相交；求的交点坐标；(2) 求 L 与 Π 的交角；(3) 求过 L 与 Π 交点且与 L 垂直的平面方程；(4) 求过 L 且与 Π 垂直的平面方程；(5) 求 L 在 Π 上的投影直线方程.

解 (1) 直线 $L:\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=-t,\\ y=t+1,\\ z=2t+1,\end{cases}$ 代入平面 $\Pi:2x+y-z-3=0$, 得 $2(-t)+(t+1)-(2t+1)-3=0, t=-1$, 故交点为 $P(1,0,-1)$.

(2) 直线 L 的方向向量为 $(-1,1,2)$, 故 L 与 Π 的夹角为 $\varphi, \sin\varphi=\frac{|2\times(-1)+1-2|}{\|(-1,1,2)\|\|(2,1,-1)\|}=\frac{1}{2}, \varphi=\frac{\pi}{6}$.

(3) 过 $P(1,0,-1)$ 且与 Π 垂直的平面方程为 $2(x-1)+y+(-1)(z+1)=0$, 即 $2x+y-z-3=0$.

(4) 所求平面方程的法向量为 $\overrightarrow{n}=(-1,1,2)\times(2,1,-1)=(-3,3,-3)$, 故平面方程为 $-3x+3(y-1)-3(z-1)=0, x-y+z=0$.

(5) 直线 $L:\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ 是如下两平面的交线：$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}, \frac{x}{-1}=\frac{z-1}{2}$, 即 $x+y-1=0, 2x+z-1=0$. 通过该直线的平面束方程为 $(x+y-1)+\lambda(2x+z-1)=0$, 即 $(2\lambda+1)x+y+\lambda z-\lambda-1=0$. 当平面束方程中的某个平面的法向量与 π 的法向量垂直时，其交线即为所求.

由 $(2\lambda+1,1,\lambda)\cdot(2,1,-1)=3\lambda+3=0$, 得 $\lambda=-1$, 此平面方程为 $-x+y-z-2=0$, 于是所求直线方程为 $\begin{cases}2x+y-z-3=0,\\ x-y+z+2=0.\end{cases}$

31 第七章习题课

一、 选择题

1. 若直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ 和直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=z$ 相交，则 λ 等于（ ）

   (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{5}{4}$ (D) $\frac{5}{4}$

   解 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=z$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=t-1,\\ y=t+1,\\ z=t,\end{cases}$ 代入直线方程 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$, 得 $\frac{t-2}{1}=\frac{t+2}{2}=\frac{t-1}{\lambda}$, 解得 $t=6,\lambda=\frac{5}{4}$. 选 (D).

2. 母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程是 ()

   (A) $x^2+2y=16$ (B) $3y^2-z^2=16$

   (C) $3x^2+2z^2=16$ (D) $-y^2+3z^2=16$

   解 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 消去 x 得，$3y^2-z^2=16$, 选 (B).

3. 曲线 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4,\\ z=0\end{cases}$ 的参数方程是 ()

   (A) $\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=\sqrt{3}\sin\theta,\\ z=0.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}x=1+2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta,\\ z=0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\theta, \\ y=\sqrt{3}\sin\theta, \\ z=0. \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} x=2\cos\theta, \\ y=2\sin\theta, \\ z=0. \end{cases}$

解　将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$, 得 $(x-1)^2+y^2=3$, 令 $x-1=\sqrt{3}\cos\theta$, 则 $y=\sqrt{3}\sin\theta$, 从而选 (A).

二、　填空题

1. 已知 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 垂直，且 $\|\overrightarrow{a}\|=5, \|\overrightarrow{b}\|=12$，则 $\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\|=$ ______,
   $\|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\|=$ ______.

   解　$\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\|^2=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})^2=\overrightarrow{a}^2+2a\cdot b+\overrightarrow{b}^2=25+0+144=169, \|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\|=13$;
   $\|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\|^2=(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})^2=\overrightarrow{a}^2-2a\cdot b+\overrightarrow{b}^2=25-0+144=169, \|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\|=13$.

2. 设某向量与 Ox 轴和 Oy 轴成等角，而与 Oz 轴组成的角是它们的两倍，那么这个向量的方向角 α______, β______, γ______.

   解　由题意知，某向量与 Ox 轴和 Oy 轴成等角为 $\alpha=\beta$，与 Oz 轴组成的角 $\gamma=2\alpha \quad (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$, 因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 于是 $2\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1, 4\cos^2\alpha=1, \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha=\frac{\pi}{4}, \beta=\frac{\pi}{4}, \gamma=\frac{\pi}{2}$.

3. 已知从原点到某平面所作的垂线的垂足为点 $(-2,-2,1)$，则该平面方程为 ______.

   解　平面的法向量为 $\overrightarrow{n}=(-2,-2,1)$, 平面方程为 $-2(x+2)-2(y+2)+z-1=0$, 即 $2x+2y-z+9=0$.

三、　证明：$\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})-\overrightarrow{b}(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})$ 与 $\overrightarrow{c}$ 垂直.

解　$(\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})-\overrightarrow{b}(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}))\cdot\overrightarrow{c}=(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})-(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})=0$.

四、 求原点关于平面 $6x+2y-9z+121=0$ 的对称点.

解 求原点与平面 $6x+2y-9z+121=0$ 垂直的直线方程为 $\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-9}$, 参数方程为 $\begin{cases} x=6t, \\ y=2t, \\ z=-9t, \end{cases}$ 与平面 $6x+2y-9z+121=0$ 的交点: 由 $6(6t)+2(2t)-9(-9t)+121=0, 121t+121=0$, 得 $t=-1$, 交点为 $P(-6,-2,9)$, 从而 P 关于该平面的对称点坐标为 $x=2\times(-6)=-12, y=2\times(-2)=-4, z=2\times 9=18$, 即所求对称点为 $O'(-12,-4,18)$.

五、 求过点 $(-1,2,3)$ 垂直于直线 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ 且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

解 所求直线的方向向量 $\overrightarrow{n}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=-3\overrightarrow{i}+6\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}=(-3,6,-3)=-3(1,-2,1)$, 方程为 $\frac{x+1}{1}=\frac{x-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

六、 求过原点且与直线 $\begin{cases} x+2y+3z+4=0, \\ 2x+3y+4z+5=0 \end{cases}$ 垂直相交的直线方程.

解 直线 $L:\begin{cases} x+2y+3z+4=0, \\ 2x+3y+4z+5=0 \end{cases}$ 的方向向量为 $\overrightarrow{n}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}=(-1,2,-1)$, 设 L 上的一点 $P(m,n,p)$, 使 OP 垂直直线 L, 故所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{s}=(m,n,p)$, 直线方程为 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$, 则 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{s}=(-1,2,-1)\cdot(m,n,p)=2n-m-p=0$. 又 $\begin{cases} m+2n+3p+4=0, \\ 2m+3n+4p+5=0. \end{cases}$ 于是 $m=\frac{2}{3}, n=-\frac{1}{3}, p=-\frac{4}{3}$, 所求直线方程为 $\frac{x}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{4}$.

七、 ★ 讨论两直线 $L_1:\begin{cases} 2x-3y+z=0, \\ x+2y+4z+7=0 \end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases} 3x-2y+3z+5=0, \\ x-3y-2z-3=0 \end{cases}$ 的位置关系.

解 直线 L_1 的方向向量为 $\overrightarrow{n_1} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -14\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{k} - 7\overrightarrow{j} =$ $(-14,7,-7)$, 过点 $P(-3,-2,0)$, 故参数方程为 $\begin{cases} x = -14t-3, \\ y = 7t-2, \\ z = -7t. \end{cases}$

过 L_2 的平面束方程为 $(3x-2y+3z+5)+\lambda(x-3y-2z-3)=0$, 即 $(3+\lambda)x+(-2-3\lambda)y+(3-2\lambda)z-3\lambda+5=0$. 当直线 L_1 与此平面束中的平面相交时，有 $(3+\lambda)(-14t-3)+(-2-3\lambda)(7t-2)+(3-2\lambda)(-7t)-3\lambda+5=-7t(3\lambda+11)=0, t=0$, 此时交点为 $P(-3,-2,0)$, 于是 $P(-3,-2,0)$ 是 L_1 与 L_2 的交点，即 L_1 与 L_2 相交.

另解 因为 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$, 故 $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+2y+4z+7u=0 \\ 3x-2y+3z+5u=0 \\ x-3y-2z-3u=0 \end{cases}$ 有非零解 $(x,y,z,1)$,

即 L_1 与 L_2 相交.

32 期末模拟卷

一、 填空题

1. (3 分)$\frac{d^2}{dx^2}[\ln(\sin e^x)] =$ ________.

   解 因为 $\frac{d}{dx}[\ln(\sin e^x)] = \frac{1}{\sin e^x}\cos e^x \cdot e^x = e^x \cot e^x$, $\frac{d^2}{dx^2}[\ln(\sin e^x)] = e^x \cot e^x + e^x(-\sec^2 e^x \cdot e^x)$
   $= e^x \cot e^x - e^{2x}\sec^2 e^x$.

2. (3 分) 过点 $P(1,0,0)$ 且又经过直线 $L: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{3}$ 平面方程为 ________.

解 $Q(-1,0,2)$ 在直线 L 上，直线 L 的方向向量为 $\vec{n}=(1,-2,3)$，故所求平面的法向量为 $\overrightarrow{PQ}\times\vec{n}=(2,0,-2)\times(1,-2,3)=(-4,-8,-4)=-4(1,2,1)$，于是所求平面方程为 $(x+1)+2y+(z-2)=0$，即 $x+2y+z-1=0$.

3. (3 分)$\int(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2dx=$________.

   解 $\int(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2dx=\int(1-\sin x)dx=x+\cos x+C$.

4. (3 分)$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=$________.

   解 因为 $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1})dx=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=0$，但 $\lim\limits_{x\to0}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 不存在，故 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}$ 不存在.

5. (3 分) 已知 $|\vec{a}|=3,\left|\vec{b}\right|=5,\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=8$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=$________.

   解 因为 $|\vec{a}|=3,\left|\vec{b}\right|=5,\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=8$，故 $\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=16$，从而 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{9+25-16}{2}=9$. 于是 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}=\frac{9}{3\times5}=\frac{3}{5},\sin\theta=\frac{4}{5},\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=3\times5\times\frac{4}{5}=12$.

二、 选择题

1. (3 分) 已知 $f(x)$ 为可导的偶函数，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{2x}=-2$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,2)$ 处的切线方程是 ()

   (A) $y=4x+6$ (B) $y=-4x-2$ (C) $y=x+3$ (D) $y=-x+1$

   解 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{2x}=-2$，故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=-4$，从而 $f'(1)=-4$，于是 $y=f(x)$ 在 $(-1,2)$ 处的切线方程是 $y-2=-4(x+1)$，即 $4x+y+2=0$. 选 (B).

2. (3 分) 设 $f(x)=(x^3+1)g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=-1$ 及其邻域有定义，则 $\lim\limits_{x\to-1}g(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导的 ()

   (A) 充分条件 (B) 必要条件

   (C) 既不充分也不必要 (D) 充要条件解 如果 $\lim\limits_{x\to-1}g(x)$ 存在，设 $\lim\limits_{x\to-1}g(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^3+1)g(x)-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}[(x^2-x+1)g(x)]=$

$\lim\limits_{x\to-1}(x^2-x+1)\lim\limits_{x\to-1}g(x)=3A$, 即 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导. 反之，如果 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^3+1)g(x)-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}[(x^2-x+1)g(x)]$ 存在，设为 B. 从而 $\lim\limits_{x\to-1}g(x)=\lim\limits_{x\to-1}[(x^2-x+1)g(x)]\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{B}{3}$, 即 $\lim\limits_{x\to-1}g(x)$ 存在. 选 (D).

3. (3 分) 设 $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos 2x$, 则 $f^{(27)}(\pi)$ 的值等于 ()

(A) 0　　(B) $\frac{1}{2^{27}}$　　(C) $2^{27}-\frac{1}{2^{27}}$　　(D) 2^{27}

解　因为 $\sin^{(n)}x=\sin(x+\frac{n\pi}{2}),\cos^{(n)}x=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$, 故 $\sin^{(27)}(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2^{27}}\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{27\pi}{2})=0,\cos^{(27)}(2\pi)=2^{27}\cos(27\pi+\frac{27\pi}{2})=2^{27}$, 选 (D).

4. (3 分) 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$ ()

(A) 有水平渐近线 $y=1$　　(B) 有垂直渐近线 $x=0$

(C) 既有水平渐近线又有垂直渐近线　　(D) 既无水平渐近线又无垂直渐近线解　因为 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$，故曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 有水平渐近线 $y=1$，但无垂直渐近线，选 (A).

5. (3 分) 若 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $\phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在开区间 $(0,2)$ 上 ()

(A) 有第一类间断点　　(B) 有第二类间断点

(C) 两类间断点都有可能　　(D) 是连续的解　因为 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$, 故 $\phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to1^-}\phi(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3}{3}=\frac{1}{3}$, $\lim\limits_{x\to1^+}\phi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6})=\frac{1}{3}$, 故 $\phi(x)$ 在开区间 $(0,2)$ 上连续，选 (D).

三、 试解下列各题：

1. (8 分) 设 $f(x)=2^{|1-x|}$, 求 $f'(x)$.

解　因为 $f(x)=2^{|1-x|}=\begin{cases}2^{1-x}, & x<1,\\ 2^{x-1}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 故 $f'(x)=\begin{cases}-2^{1-x}\ln 2, & x<1,\\ 2^{x-1}\ln 2, & x\geqslant 1,\end{cases}$.

2. (8 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x(1+x)})]$
$=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)})=e\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x+3x^2}=-e\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{2+6x}=-\frac{e}{2}$.

3. (8 分) 计算 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$.

解 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=\int_0^1\ln(1+x)d(\frac{1}{2-x})=\frac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{(2-x)(1+x)}dx=\ln 2-\frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{2-x}\Big|_0^1=\frac{\ln 2}{3}$.

4. (8 分) 计算 $\int_0^1\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})dx$.

解 $\int_0^1\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})dx\overset{u=\sqrt{x}}{=}2\int_0^1u^2\ln(1+u)du=\frac{2}{3}\int_0^1\ln(1+u)du^3=\frac{2}{3}u^3\ln(1+u)\Big|_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{u^3}{1+u}du=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{2}{3}\int_0^1(u^2-u+1-\frac{1}{1+u})du=\frac{4}{3}\ln 2-\frac{5}{9}$.

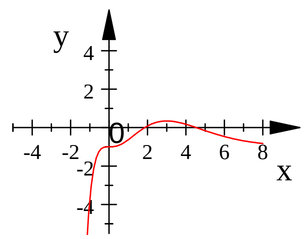
5. (8 分) 计算 $\int\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}dx$.

解 $\int\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}dx=\int\arctan\frac{1}{x}d(\arctan x)=\arctan\frac{1}{x}\cdot\arctan x-\int\arctan x\cdot\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}(-\frac{1}{x^2})dx\arctan\frac{1}{x}\cdot\arctan x+\int\arctan x\cdot d(\arctan x)$
$=\arctan\frac{1}{x}\cdot\arctan x+\frac{1}{2}\arctan^2 x+C$.

6. (10 分) 求方程 $e^x=x^3$ 的实根的个数.

解 令 $f(x)=x^3e^{-x}-1, f(0)=-1<0, f(2)=\frac{8}{e^2}-1>0$, 故 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内至少有一个零点. 又因为 $f'(x)=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=x^2e^{-x}(3-x)$, 故当 $x<3$ 时，$f'(x)>0$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 内单调增加；当 $x>3$ 时，$f'(x)<0$, 即 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 内单调减少，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x^3}{e^x}-1)=-1$, 从而必有 $x_0\in(3,+\infty)$, 使 $f(x_0)<0$, 故 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 必有一零点. 于是方程 $e^x=x^3$ 的实根的个数为 2.

说明：$y=x^3e^{-x}-1$ 的图形



四、 (10 分) 求曲线 $x=t^2, y=3t+t^3$ 的拐点.

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{3+3t^2}{2t}, \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{3+t^2}{2t})}{2t}=\frac{1}{4t^3}\left(t^2-3\right)=0, t=\pm\sqrt{3}, x=3, y=\pm 6\sqrt{3}. \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4t^3}(x-3)$，故当 $t>0$ 时，$x>3, \frac{d^2y}{dx^2}>0, x<3, \frac{d^2y}{dx^2}<0$，故 $(3,6\sqrt{3})$ 是拐点，同理 $(3,-6\sqrt{3})$ 也是拐点.

五、 (10 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[-a,a] \quad (a>0)$ 上连续，且 $g(x)$ 为偶函数，又 $f(x)$ 满足条件：对任意的 $x\in[-a,a], f(x)+f(-x)=A$, 其中 A 为常数.

(1) 用换元法证明：$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = A\int_0^a g(x)dx$.

证明 因为 $g(x)$ 为偶函数，故 $g(-x)=g(x), \int_a^0 g(-x)dx=-\int_0^a g(x)dx$. 从而 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx \overset{u=-x}{=} -\int_a^{-a} f(-u)g(-u)du = \int_{-a}^{a} f(-x)g(x)dx = \frac{1}{2}(\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx+\int_{-a}^{a} f(-x)g(x)dx) = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(f(x)+f(-x)) = \frac{A}{2}\int_{-a}^{a} g(x)dx = \frac{A}{2}(\int_{-a}^{0} g(x)dx+\int_{-a}^{0} g(x)dx) = \frac{A}{2}(\int_{-a}^{0} g(x)dx+\int_{-a}^{0} g(x)dx) = \frac{A}{2}(\int_{-a}^{0} g(x)dx-\int_a^0 g(-x)dx) = A\int_0^a g(x)dx$.

(2) 利用上述结论计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot\arctan e^x dx$.

解 因为 $\arctan e^x+\arctan e^{-x}=\arctan e^x+\arctan\frac{1}{e^x}=\frac{\pi}{2}$，故利用上述结论，得 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot\arctan e^x dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\frac{\pi}{2}$.

参考文献

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学. 北京：高等教育出版社，2002，第 5 版

[2] 汪光先 戴中寅 武震东. 高等数学习题课教程. 苏州：苏州大学出版社，2005，第 1 版

[3] 骆一舟. 高等数学辅导及习题精解. 陕西：陕西师范大学出版社，2004，第 1 版

[4] Darel W Hardy, Carol L Walker. Doing Mathematics with Scientific WorkPlace and Scientific Notebook. MacKichan Software,Inc. 2005

[5] Susan Bagby. Creating Documents with Scientific WorkPlace and Scientific Word. MacKichan Software,Inc. 2005