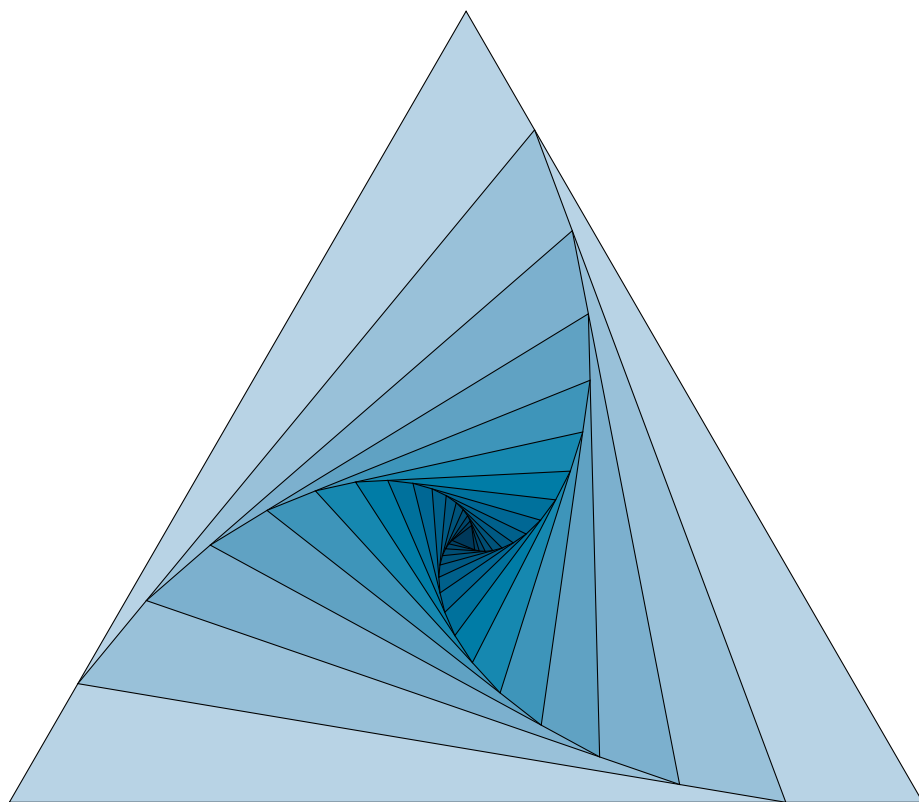




线性代数读本

MathLab

读本

线性代数

利用 *Scientific WorkPlace* 做数学



ICT

苏州大学数学科学学院 (<http://math.suda.edu.cn>).

前言

本书是针对普通高校本科生开设线性代数课程的要求而编写的《线性代数读本》。线性代数的内容基本定型，但作为教科书的编排各有特色。线性代数的基本理论已成熟，基本的计算方法也很通行。如何组织线性代数基本概念、介绍线性代数的基本理论，如何利用现有的计算机代数系统辅助计算是值得探索的。本书以解线性方程组为主线，充分理解线性方程组的结构及解的情形，以矩阵、向量为基本工具探索线性方程组的解的结构，注重基本概念、基本方法，适当降低证明要求、减少运算技巧及减轻手工的运算量，实为非常有益的尝试。

在编写过程中，参考了国内已出版的同类教材，吸收了他们的许多精华和优点，在题材的选取上作了一些变动。如后移行列式的内容，减少行列式的计算技巧；适当地增加了一些新内容，对书中所有的计算方法都给出了Scientific WorkPlace内置的MuPAD操作步骤，有翔实的应用实例可供参考，有相当数量的习题可供练习。

全书内容由Abc主持编写。具体分工：XXX写第1至4章、第8章；YYY编写第5章至第7章。苏州大学ZZZ教授认真地阅读了本书，纠正了书中很多错误，并提出了许多宝贵的修改意见；苏州大学WWW教授审定了书稿。这里向他们及本书所列参考文献的作者们，苏州大学出版社以及为本书出版给予热心支持和帮助的朋友们，表示衷心的感谢。

本书可作为普通高校本科生研究生线性代数课程的参考书，也可作为科技人员使用线性代数和MuPAD的参考手册。

由于作者水平所限，书中一定还有疏漏不足之处，希望读者不吝批评指正。

Abc 潘洪亮
mathlab@suda.edu.cn
2020年8月



目录

1	在SWP中学习线性代数	1
1.1	练习前的准备	1
1.2	SWP的特色	2
1.3	从做中学	3
2	线性方程组与消元法	5
2.1	线性方程组的结构	6
2.1.1	解线性方程组（方程个数等于未知量个数）	6
2.1.2	解线性方程组（方程个数大于未知量个数）	7
2.1.3	解线性方程组（方程个数小于未知量个数）	8
2.2	初等变换与Gauss消元法	8
2.2.1	Gauss消元法	9
2.2.2	初等行变换	11
2.3	本章概括	13
2.4	从做中学	13
3	矩阵及其运算	15
3.1	矩阵的创建	16
3.1.1	用圆括号或方括号限定矩阵	16
3.1.2	利用矩阵对话框创建矩阵	16
3.1.3	从矩阵获取元素	16
3.1.4	计算矩阵的行或列	17

3.2	矩阵的运算	18
3.2.1	矩阵的加法与减法	18
3.2.2	数乘矩阵	19
3.2.3	矩阵的转置	19
3.2.4	矩阵的乘法	21
3.3	单位矩阵与逆矩阵	23
3.3.1	创建 n 阶单位矩阵	23
3.3.2	逆矩阵	24
3.3.3	矩阵的多项式	24
3.4	线性方程组的矩阵解法	26
3.4.1	线性方程组转换到矩阵	27
3.4.2	线性方程的矩阵解法	27
3.5	矩阵的初等行变换	28
3.5.1	使用MuPAD函数multRow(x,i,k)进行倍乘变换	29
3.5.2	使用MuPAD函数swapRow进行对换变换	29
3.5.3	使用MuPAD函数addRow(x,i,j,k)进行倍加变换	30
3.5.4	Guass消元法及行阶梯形矩阵	31
3.5.5	矩阵转换到线性方程组	32
3.6	本章概括	35
3.7	从做中学	36
4	矩阵的初等变换与线性方程组	39
4.1	分块矩阵	39
4.1.1	子矩阵及矩阵的合并与堆积	40
4.1.2	分块矩阵的运算	42
4.2	初等矩阵与初等变换	45
4.2.1	初等矩阵	45
4.2.2	对矩阵进行初等行变换	46
4.3	矩阵的秩	46
4.3.1	求矩阵的秩	47
4.3.2	线性方程组有解的充要条件	48
4.4	逆矩阵的判别及求法	48
4.4.1	逆矩阵的判别	48
4.4.2	求可逆矩阵的逆矩阵	49
4.4.3	计算可逆矩阵的负整数幂	51
4.5	矩阵方程	52
4.6	本章概括	53
4.7	从做中学	54

5	向量组与线性方程组的解空间	57
5.1	向量的概念	57
5.1.1	以矩阵形式构造向量	57
5.1.2	以列表形式构造向量	58
5.1.3	使用MuPAD函数col扩展版得到矩阵列向量(组)	58
5.2	向量的和与数乘向量	59
5.2.1	计算向量的和	59
5.2.2	计算数乘向量	59
5.3	向量空间及齐次线性方程组的解空间	60
5.3.1	向量空间	60
5.3.2	齐次线性方程组的解空间	61
5.4	向量组的线性表示及线性相关与无关	61
5.4.1	向量组的线性表示	61
5.4.2	向量组的线性相关	63
5.4.3	向量组的线性无关	64
5.5	向量组的秩	65
5.5.1	向量组间的关系	65
5.5.2	极大线性无关组与向量组的秩	66
5.6	向量空间的基、维数与坐标	69
5.6.1	求列向量空间的基	70
5.6.2	基向量、过渡矩阵及坐标	70
5.7	线性方程组的解的结构	72
5.8	本章概括	75
5.9	从做中学	76
6	行列式与矩阵的对角化	81
6.1	行列式	81
6.1.1	计算方阵的行列式	82
6.1.2	使用MuPAD自定义DetX函数展示按递归定义计算行列式	84
6.1.3	行列式的性质	84
6.1.4	使用MuPAD自定义DetEAC函数按列查看元素与对应的代数余子式乘积之和	88
6.1.5	几类特殊行列式的计算	89
6.1.6	利用Cramer法则解线性方程组	90
6.2	矩阵的对角化问题	92
6.3	特征多项式	92
6.4	特征值及特征向量	93
6.4.1	计算方阵的特征值	93
6.4.2	计算方阵的特征向量及特征值	94

6.5	向量的内积与正交矩阵	96
6.5.1	向量的内积	96
6.5.2	向量的长度	97
6.5.3	正交矩阵	97
6.6	实对称矩阵的对角化	98
6.6.1	线性无关的向量组标准正交化	98
6.6.2	使用MuPAD函数orthog将线性无关的向量组正交化	99
6.6.3	使用MuPAD函数normalize将向量标准化	99
6.6.4	实对称矩阵的对角化	100
6.7	本章概括	102
6.8	从做中学	104
7	实二次型及其化简方法	109
7.1	正交变换的方法化简二次型	109
7.2	配方法化简二次型	111
7.3	正定二次型	112
7.4	本章概括	114
7.5	从做中学	114
8	附录—科学工作平台SWP	117
8.1	引言	117
8.2	安装	118
8.3	入门	118
8.3.1	放置插入点	118
8.3.2	如何在Scientific WorkPlace中选择表达式	118
8.3.3	为运算选择表达式	119
8.3.4	作为Evaluate的快捷键	119
8.3.5	中断计算	119
8.3.6	菜单设置	120
8.4	对函数、表达式操作	121
8.4.1	反斜杠运算符 (/)	121
8.4.2	标准的数学函数	121
8.4.3	其它的运算	123
8.4.4	一些特殊的运算和命令	124
8.4.5	常数	125
8.4.6	多项式	125
8.4.7	极限	126
8.4.8	导数	127
8.4.9	不定积分	127

8.4.10	分步运算	128
8.4.11	定积分	128
8.4.12	数值积分	129
8.4.13	无穷级数	129
8.4.14	代入表达式求值	129
8.5	矩阵	130
8.5.1	标准运算	130
8.5.2	矩阵子菜单项	131
8.6	解方程（组）	133
8.6.1	精确解	133
8.6.2	数值解	134
8.6.3	整数解	134
8.6.4	递归解	135
8.7	模算术	135
8.7.1	整数模 m	135
8.7.2	矩阵模 m	136
8.7.3	多项式模 m	136
8.7.4	多项式模多项式	136
8.8	定义	136
8.8.1	新定义、取消定义、显示定义、清除定义	137
8.8.2	用延迟计算的定义	140
8.8.3	唤醒结果	140
8.8.4	保存定义、恢复定义	140
8.8.5	多变量函数	141
8.8.6	行变量与列变量	141
8.8.7	矩阵值函数	142
8.8.8	分段函数	142
8.8.9	使用其它MuPAD函数	143
8.8.10	自定义函数	143
8.9	二维绘图	143
8.9.1	框架属性对话框	144
8.9.2	同时绘出多个图形	144
8.9.3	成组绘图	144
8.9.4	轴和视图页面	145
8.9.5	点列绘图	145
8.9.6	保形绘图	145
8.9.7	向量和梯度域绘图	146
8.9.8	参数方程	146
8.9.9	隐含方程	147
8.9.10	极坐标	147
8.9.11	参数极坐标	147

8.10	二维动画	147
8.10.1	直角坐标方程	148
8.10.2	参数方程	148
8.10.3	极坐标	148
8.10.4	极坐标中的参数化曲线	148
8.10.5	隐含方程	149
8.11	三维绘图	149
8.11.1	三维绘图工具	149
8.11.2	隐含方程	150
8.11.3	参数化曲面	150
8.11.4	空间曲线	150
8.11.5	柱坐标	150
8.11.6	柱坐标中的参数化曲面	151
8.11.7	球坐标	151
8.11.8	球坐标中的参数化曲面	151
8.11.9	练习	152
8.11.10	解答	152
8.12	三维动画	153
8.12.1	直角坐标	154
8.12.2	直角坐标中的参数化曲面	154
8.12.3	柱坐标	154
8.12.4	柱坐标中的参数化曲面	155
8.12.5	球坐标	155
8.12.6	球坐标中的参数化曲面	155
8.12.7	隐含方程	155
8.12.8	管	155
8.13	微积分	155
8.13.1	隐含方程求导	155
8.13.2	迭代	156
8.13.3	求极值	156
8.13.4	积分方法	157
8.13.5	黎曼和的图形表示	157
8.13.6	近似求积方法	158
8.14	常微分方程	158
8.14.1	精确求解	158
8.14.2	问题的初始条件	159
8.15	向量计算	161
8.15.1	点积和叉积	161
8.15.2	向量正规化	161
8.15.3	梯度、散度和卷积	161
8.15.4	海赛矩阵	162
8.15.5	雅可比矩阵	163
8.15.6	卷积和向量位势	163

8.15.7	散度	163
8.16	统计	163
8.16.1	表和矩阵	164
8.16.2	平均值、中位数、众数、矩、分位数、平均偏差、标准差、方差	164
8.16.3	相关和协方差	165
8.16.4	随机数	165
8.16.5	分布和密度	165
8.16.6	曲线拟合	167
8.16.7	练习	168
8.16.8	解答	168
8.17	单形	169
	参考文献	171



1 — 在SWP中学习线性代数

学习目标与要求

1. 熟悉SWP的用户界面、工具栏等，会定制文档窗口。
2. 会输入文本及数学表达式并能在文本与数学中切换。

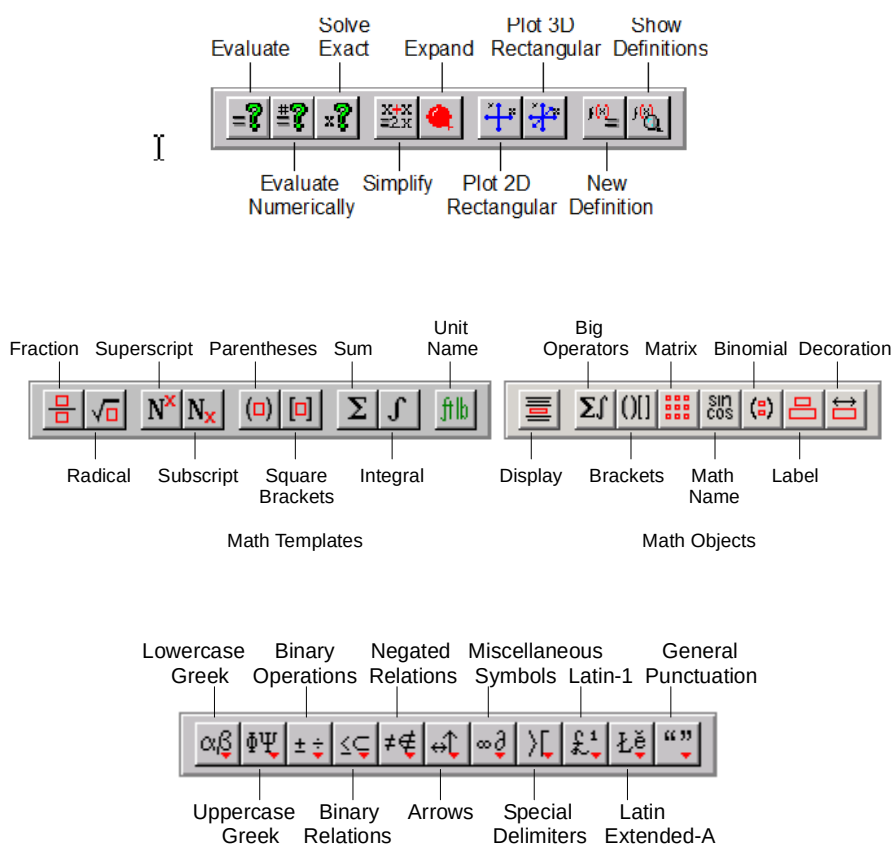
线性代数（Linear Algebra）是代数学的一个分支，主要处理线性关系问题。解线性方程组的问题是最简单的线性问题。其理论工具主要是矩阵、向量与行列式等。

在Scientific WorkPlace（简称SWP）中，你能学习线性代数。在SWP中可解决线性代数几乎所有的计算问题。你可以试一试对已有的样例进行运算。

1.1 练习前的准备

在你开始练习之前，请按下列步骤设置：

1. 打开新文档
如果文档隐藏在对话框后面，则在开始前需移到对话框进行相应处理。之后可在窗口间切换。
2. 定制文档窗口  定制文档窗口
 - (1) 选择视图菜单，检验隐藏及输入框。
 - (2) 从视图菜单中选择工具栏。
 - (3) 检验Compute, Math Objects, Math Templates, and Symbol Panels toolbars（运算、数学对象、数学模板及符号面板）。
 - (4) 选择关闭。此时程序窗口将显示如下工具栏：



3. 在练习前进入数学状态 开始设置数学状态

- 单击**数学/文本**按钮，以切换到 .
- 或者
- 使用键盘：Ctrl+m 或 Ctrl+t 或 Insert.
- 或者
- 从**插入**菜单中选择**数学**.

现在你可以输入数学表达式进行计算. 如果你求助如何操作某个数学表达式, 可以跳转到[函数、表达式](#)一节, 看看是如何做到的. 确信你输入的数学表达式是以红色显示的.

1.2 SWP的特色

利用SWP学习线性代数, 你将很快地体会到SWP至少有如下五个特色有助于你数学的学习:

- **高级的科学编辑器:** 你能在其中进行学习或使用自然的数学符号书写笔记或作业;
- **强大的科学计算器:** 你能进行复杂的数学运算及验证手工计算的准确性;
- **科学的向导:** 辅助你解决某些困难的问题;
- **科学的探索者:** 允许你编辑或重新计算有关的数学对象或问题;
- **科学的速记员:** 允许你缩写常用的材料及存储以备将来使用.

1.3 从做中学

练习 1.1

在SWP中，可利用系统的帮助文件进行学习。也可打开附录文件appendix-MuPAD.rap，边学习边练习。



2 — 线性方程组与消元法

学习目标与要求

1. 了解 n 元线性方程组及解的概念.
2. 理解线性方程组的初等变换及高斯消元法.
3. 会用高斯消元法及初等变换解线性方程组.

小学数学学过简易方程, 中学数学学过一元一次或二次方程, 二元或三元线性方程组.

定义 2.1

含有未知量的等式称为方程.

例如: 中学平面解析几何中的直线方程 $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$), 其中 x, y 是未知量, A, B, C 是常数.

定义 2.2

如果方程的未知量的次数都是一次的, 则称该方程为线性方程.

上面的直线方程就是线性方程. 如果 $B \neq 0$, 则可解出 y 得到方程 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, 斜率为 $-\frac{A}{B}$, 在 y 轴上的截距为 $-\frac{C}{B}$. 如果 (a, b) 满足 $Aa + Bb + C = 0$, 则称 (a, b) 为线性方程 $Ax + By + C = 0$ 的解. 在平面解析几何中可画出图形表示其解集.

例 2.1

在直角坐标 xOy 中画出 $3x + 4y - 5 = 0$ 的图形, 并说明其解.

解: ► 二维绘图 + 隐含方程

$$3x + 4y - 5 = 0$$

例 2.2

解线性方程组：(1) $\begin{cases} x+y-2z=1, \\ 2x-4y+z=0, \\ 2y-3z=-1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=3, \\ x+y=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-3x_3=2, \\ -x_1+2x_2-x_3=-1. \end{cases}$

解：► 解方程 + 精确解

(1) $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-4y+z=0 \\ 2y-3z=-1 \end{cases}$, 解是: $[x = \frac{17}{8}, y = \frac{11}{8}, z = \frac{5}{4}]$.

(2) $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=0 \end{cases}$, 无解.

(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-3x_3=2 \\ -x_1+2x_2-x_3=-1 \end{cases}$, 解是: $[x_1 = x_3 + 1, x_2 = x_3]$.

2.1.2 解线性方程组（方程个数大于未知量个数）

1. 输入一系列多行的线性方程组.
2. 将插入点定位线性方程, 选择运算菜单中的解方程 + 精确解.
3. 当出现求解的变量对话框时, 输入用逗号间隔的全部未知量, 选择确定.

例 2.3

解线性方程组：(1) $\begin{cases} x+y-2z=1, \\ 2x-4y+z=0, \\ 2y-3z=-1, \\ x+y=\frac{7}{2}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1, \\ 2x-y=2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-3x_3=2, \\ -x_1+2x_2-x_3=-1, \\ 4x_1+2x_2-6x_3=4. \end{cases}$

解：► 解方程 + 精确解

(1) $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-4y+z=0 \\ 2y-3z=-1 \\ x+y=\frac{7}{2} \end{cases}$, 解是: $[x = \frac{17}{8}, y = \frac{11}{8}, z = \frac{5}{4}]$.

$$(2) \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}, \text{无解.}$$

$$(3) \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-3x_3=2 \\ -x_1+2x_2-x_3=-1 \\ 4x_1+2x_2-6x_3=4 \end{cases}, \text{解是: } [x_1=x_3+1, x_2=x_3].$$

2.1.3 解线性方程组（方程个数小于未知量个数）

1. 输入一系列多行的线性方程组.
2. 将插入点定位线性方程, 选择**运算**菜单中的**解方程 + 精确解**.
3. 当出现求解的变量对话框时, 输入用逗号间隔的未知量, 未输入的未知量是自由未知量, 选择**确定**.

例 2.4

解线性方程组: (1) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ x+3z=4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1, \\ 2x_1-4x_2+2x_3=-1. \end{cases}$

解: ► 解方程 + 精确解

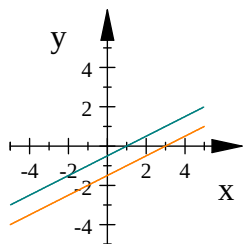
$$(1) \begin{cases} 2x-y=1 \\ x+3z=4 \end{cases}, \text{解是: } [x=4-3z, y=7-6z].$$

$$\text{或} \begin{cases} 2x-y=1 \\ x+3z=4 \end{cases}, \text{解是: } [x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}, z=\frac{7}{6}-\frac{1}{6}y].$$

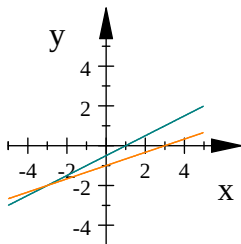
$$(2) \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=-1 \end{cases}, \text{无解.}$$

2.2 初等变换与Gauss消元法

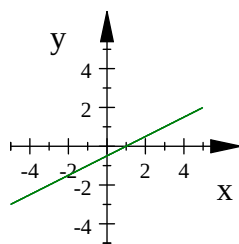
一般地, 线性方程组的解属三种情况之一: 无解、有惟一解及有无穷多个解. 例如, 两条直线可能平行、相交或重合.



$$\begin{cases} x-2y=1, \\ -x+2y=-3. \end{cases}$$



$$\begin{cases} x-2y=1, \\ -x+3y=-3. \end{cases}$$



$$\begin{cases} x-2y=1, \\ -x+2y=-1. \end{cases}$$

对线性方程组消元实质就是对线性方程组进行若干次初等行变换，转化为同解的阶梯形线性方程组。Gauss消元法就是线性方程组的行变换再加上回代的求解过程。

线性方程组有三类初等行变换（row transform，第 i 个方程记为①或第 j 行方程记为 r_j ）。

定义 2.5

1. （倍增变换）用一个非零数乘方程组中的某一个方程：① $\times k$ ，或 kr_i ；
2. （对换变换）交换方程组中的某两个方程：① $\longleftrightarrow$ ②，或 $r_i \longleftrightarrow r_j$ ；
3. （倍加变换）把方程组中的一个方程的某个倍数加到另一个方程上：① $\times k +$ ②，或 $kr_i + r_j$ 。

SWP应用初等行变换来解线性方程组。

例 2.5

$$\text{解线性方程组: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

解：► 解方程 + 精确解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{cases}, \text{解是: } [x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1].$$

2.2.1 Gauss消元法

首先应用线性方程组的初等行变换消元将方程组化为行阶梯形方程组。

定义 2.6（行阶梯形方程组）

1. 每个方程占一行；
2. 每个方程首个未知量系数非零；
3. 每个方程首个未知量在下一个方程不含有。

Gauss消元法：将方程组化为行阶梯形方程组，再判断方程组解的情形。如果出现某个方程等号左边为零、等号右边非零，则称该方程组是矛盾的或不相容的，原方程组无解。如果有解则回代写出线性方程组的解或一般解，则称方程组是相容的。

定义 2.7

如果方程组（I）与方程组（II）的解集相等，则称方程组（I）与（II）同解。

可以证明：

定理 2.1

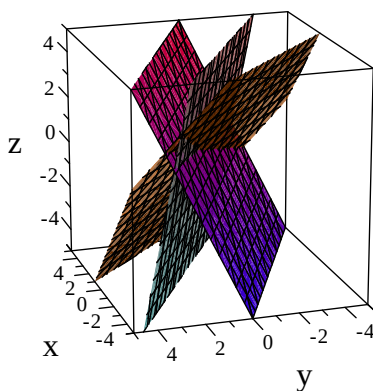
对线性方程组作初等变换后得到的方程组与原方程组同解。

例 2.6

用Gauss消元法解线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & \textcircled{1} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 & \textcircled{2} \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 & \textcircled{3} \end{cases} \xrightarrow{\textcircled{1} \times (-1) + \textcircled{2}, \textcircled{1} \times (-3) + \textcircled{3}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & \textcircled{1} \\ -x_2 + 2x_3 = 1 & \textcircled{4} \\ -x_2 + 4x_3 = 3 & \textcircled{5} \end{cases} \\ & \xrightarrow{\textcircled{4} \times (-1) + \textcircled{5}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & \textcircled{1} \\ -x_2 + 2x_3 = 1 & \textcircled{4} \\ 2x_3 = 2 & \textcircled{6} \end{cases} \xrightarrow{\textcircled{6} \times (\frac{1}{2}), \textcircled{4} \times (-1)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & \textcircled{1} \\ x_2 - 2x_3 = -1 & \textcircled{8} \\ x_3 = 1 & \textcircled{7} \end{cases} \\ & \xrightarrow{\textcircled{7} \text{代入} \textcircled{8}, \textcircled{7} \text{代入} \textcircled{1}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 & \textcircled{10} \\ x_2 = 1 & \textcircled{9} \\ x_3 = 1 & \textcircled{7} \end{cases} \xrightarrow{\textcircled{9} \text{代入} \textcircled{10}} \begin{cases} x_1 = -1 & \textcircled{11} \\ x_2 = 1 & \textcircled{9} \\ x_3 = 1 & \textcircled{7} \end{cases}. \end{aligned}$$

从上述可知: 以方程①中的 x_1 为主元, 消去方程②,③中的 x_1 . 以方程④中的 x_2 为主元, 消去方程⑤中的 x_2 . 此时方程组经初等变换后成为阶梯形方程组. 解出方程⑥中的 x_3 , 再由 x_3 回代到方程①及⑧, 从而解出 x_2 , 再由 x_2 回代到方程①, 从而解出 x_1 . 由此, 该线性方程组的解 $(-1, 1, 1)$, 即是三个方程在三维空间中代表的三个平面的交点(如下图所示).



上述手工解法不便之处是将每个方程编号. 在SWP中, 可以用类似矩阵运算来进行方程的线性运算.

定义 2.8 (方程的线性运算)

$$\begin{aligned} & a(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1) + b(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2) \\ & = (aa_{11} + ba_{21})x_1 + (aa_{12} + ba_{22})x_2 + (aa_{13} + ba_{23})x_3 = ab_1 + bb_2. \end{aligned}$$

例如, 消去第二个方程中的 x_1 : $\textcircled{1} \times (-1) + \textcircled{2}$:

$$-(x_1 + 2x_2 - x_3 = 0) + (x_1 + x_2 + x_3 = 1) = 2x_3 - x_2 = 1;$$

又例如, 消去第三个方程中的 x_1 : $\textcircled{1} \times (-3) + \textcircled{3}$:

$$-3(x_1 + 2x_2 - x_3 = 0) + (3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3) = 4x_3 - x_2 = 3.$$

2.2.2 初等行变换

Gauss消元法就是应用线性方程组的初等行变换消元将方程组化为行阶梯形方程组. 回代的实质也是消元, 即继续进行初等行变换可将方程组化为行最简阶梯形方程组.

定义 2.9 (行最简阶梯形方程组)

1. 行阶梯形方程;
2. 方程首个未知量系数为1;
3. 方程的首个未知量其他方程不含有.

将方程组化为行阶梯形方程组, 再判断方程组解的情形. 如果线性方程组有解, 则继续进行初等行变换将方程组化为最简阶梯形方程组, 最后将阶梯开头的未知量留在方程的左边, 如有剩余的未知量(自由未知量)则移到方程的右边, 写出一般解.

例 2.7

用初等行变换解线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow{\substack{-r_1 + r_2, \\ -3r_1 + r_3}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow{-r_2 + r_3} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_3 = 2 \end{cases} \\ & \xrightarrow{\substack{-r_2, \\ \frac{1}{2}r_3}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\substack{r_3 + r_1, \\ 2r_3 + r_2}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{-2r_2 + r_1} \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

在SWP中, 还可以用下面的类似矩阵行变换(下一章将详细介绍)来对线性方程组进行初等行变换:

例 2.8

用初等行变换函数 $J(x, i, j, k)$ (即 $kr_i + r_j$), $K(x, i, k)$ (即 kr_i), $S(x, i, j)$ (即 $r_i \leftrightarrow r_j$)解

线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } & J\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 + 2x_2 - x_3 & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 & 3 \end{array}, 1, 2, -1\right) \rightarrow J\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 + 2x_2 - x_3 & 0 \\ 2x_3 - x_2 & 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 & 3 \end{array}, 1, 3, -3\right) \rightarrow \\ & J\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 + 2x_2 - x_3 & 0 \\ 2x_3 - x_2 & 1 \\ 4x_3 - x_2 & 3 \end{array}, 2, 3, -1\right) \rightarrow K\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 + 2x_2 - x_3 & 0 \\ 2x_3 - x_2 & 1 \\ 2x_3 & 2 \end{array}, 3, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \\ & J\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 + 2x_2 - x_3 & 0 \\ 2x_3 - x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{array}, 3, 1, 1\right) \rightarrow J\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 + 2x_2 & 1 \\ 2x_3 - x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{array}, 3, 2, -2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} x_1+2x_2 & 1 \\ -x_2 & -1 \\ x_3 & 1 \end{array} & \begin{array}{ccc} x_1+2x_2 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{array} & \begin{array}{ccc} x_1 & -1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{array} \\
 \rightarrow K(& \rightarrow J(& = \\
 \begin{array}{ccc} x_1+2x_2-x_3 & 0 \\ x_1+x_2+x_3 & 1 \\ 3x_1+5x_2+x_3 & 3 \end{array} & \begin{array}{ccc} x_1+2x_2-x_3 & 0 \\ 3x_1+5x_2+x_3 & 3 \\ x_1+x_2+x_3 & 1 \end{array} & \\
 S(& = & .
 \end{array}$$

例 2.9

用初等行变换解线性方程组:
$$\begin{cases} -x_1+4x_2-x_3=1, \\ x_1+3x_2+x_3=0, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=-1. \end{cases}$$

解:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} -x_1+4x_2-x_3=1 \\ x_1+3x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2+3x_3=-1 \end{cases} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2, -3r_1+r_3]{r_1 \leftrightarrow r_2, -3r_1+r_3} \begin{cases} x_1+3x_2+x_3=0 \\ 7x_2=1 \\ -7x_2=-1 \end{cases} \xrightarrow[r_2+r_3]{r_2+r_3} \begin{cases} x_1+3x_2+x_3=0 \\ 7x_2=1 \\ 0=0 \end{cases} \\
 & \xrightarrow{\frac{1}{7}r_2} \begin{cases} x_1+3x_2+x_3=0 \\ x_2=\frac{1}{7} \\ 0=0 \end{cases} \xrightarrow{-3r_2+r_1} \begin{cases} x_1+x_3=-\frac{3}{7} \\ x_2=\frac{1}{7} \\ 0=0 \end{cases}, \text{原方程的解为} \begin{cases} x_1=-c-\frac{3}{7}, \\ x_2=\frac{1}{7}, \\ x_3=c \end{cases} \quad (c \text{ 为任意实数}).
 \end{aligned}$$

给定线性方程组, 理论上用高斯消元法总可以知道它是否有解, 如有解还可以求出它的一般解.

例 2.10

λ 为何值时, 方程组
$$\begin{cases} x_1-x_2+\lambda x_3=\lambda^2, \\ x_1+x_2-\lambda x_3=0, \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=\lambda \end{cases}$$
 有解, 有解时求出解.

解:
$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x_1-x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \\ x_1+x_2-\lambda x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=\lambda \end{cases} \xrightarrow{-r_1+r_2, -2r_1+r_3} \begin{cases} x_1-x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \\ 2x_2-2\lambda x_3=-\lambda^2 \\ x_2-\lambda x_3=\lambda-2\lambda^2 \end{cases} \\
 & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3, -2r_2+r_3, r_2+r_1} \begin{cases} x_1=\lambda-\lambda^2 \\ x_2-\lambda x_3=\lambda-2\lambda^2 \\ 0=3\lambda^2-2\lambda \end{cases} \xrightarrow{\lambda=0 \text{ 或 } \lambda=\frac{2}{3}} \begin{cases} x_1=\lambda-\lambda^2 \\ x_2-\lambda x_3=\lambda-2\lambda^2 \\ 0=0 \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$\lambda=0$ 时, (1) $\rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ 0=0 \end{cases}$, 原方程的解为 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=c \end{cases}$ (c 为任意实数)

$\lambda=\frac{2}{3}$ 时, (1) $\rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{2}{9} \\ x_2-\frac{2}{3}x_3=-\frac{2}{9} \\ 0=0 \end{cases}$, 原方程的解为 $\begin{cases} x_1=\frac{2}{9} \\ x_2=\frac{2}{3}c-\frac{2}{9} \\ x_3=c \end{cases}$ (c 为任意实数)

$\lambda \neq 0, \frac{2}{3}$ 时, 原方程组无解.

2.3 本章概括

1. 基本概念：线性方程组、解、同解、自由未知量、一般解；

初等变换 ($\textcircled{1} \times k, \textcircled{1} \longleftrightarrow \textcircled{j}, \textcircled{1} \times k + \textcircled{j};$);

(初等行变换: $kr_i, r_i \longleftrightarrow r_j, kr_i + r_j$)

2. 线性方程组解的情形【有唯一解、无穷多个解；无解】；高斯 (Gauss) 消元法.

♠ 相关数学史

约翰·卡尔·弗里德里希·高斯 (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777年4月30日—1855年2月23日) 德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家. 是近代数学奠基者之一, 高斯被认为是历史上最重要的数学家之一, 并享有“数学王子”之称. 高斯和阿基米德、牛顿并列为世界三大数学家. 一生成就极为丰硕, 以他名字“高斯”命名的成果达110个, 属数学家中之最. 他对数论、代数、统计、分析、微分几何、大地测量学、地球物理学、力学、静电学、天文学、矩阵理论和光学皆有贡献.



约翰·卡尔·弗里德里希·高斯

2.4 从做中学

练习 2.1

一、选择题

1. 线性方程组 $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$ 的解的情形为 ()
A. 无穷多个解 B. 惟一解 C. 不存在
2. 线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ 的解情形 ()
A. 惟一解 B. 无穷多个解 C. 不存在

二、填空题

3. 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = -4, \\ 5x_1 + 7x_2 = 11 \end{cases}$ 的解为
(a) $x_1 =$ _____,
(b) $x_2 =$ _____.
4. 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$ 的解为
(a) $x_1 =$ _____,
(b) $x_2 =$ _____,
(c) $x_3 =$ _____.

5. 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ 的解为

(a) $x_1 = \underline{\hspace{2cm}},$

(b) $x_2 = \underline{\hspace{2cm}},$

(c) $x_3 = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题

6. 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_4 = 0 \end{cases}$ 是否有解? 当有解时, 求出它的所有解.

7. 讨论参数 k 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 + k, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 + 3k, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 - k \end{cases}$ 无解, 有解. 若有解, 求出其一般解.

8. 当 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$ 无解? 当 λ 为何值时, 此方程组有惟一解?

3 — 矩阵及其运算

学习目标与要求

1. 理解矩阵的概念.
2. 掌握矩阵的运算及性质.
3. 理解逆矩阵的概念及性质.
4. 熟练掌握线性方程组的矩阵解法.

日常统计时常用到二维的表格. 如果固定线性方程组未知量的位置, 消元实质上是将对应未知量的系数化为零. 由此, n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \quad \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

未知量的系数与表格相关.

定义 3.1

$m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$)表达的表格:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

叫做 m 行 n 列矩阵(matrix). 常用圆括号(或方括号)表示其整体, 记为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

其中第 i 行第 j 列的元素为 a_{ij} , 矩阵可简记为 $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

3.1 矩阵的创建

选择视图菜单中的帮助行及输入框, 有助于输入焦点的定位. 缺省状态是显示的, 方便操作. 但在预览或打印时并不显示.

通常用括号来限定矩阵, 既可内置定界符也可手工输入括号. 两种方式即使提供相同的屏幕外观及属性, 但排版时稍有区别, 内置定界符与矩阵内容更为紧密些.

3.1.1 用圆括号或方括号限定矩阵

1. 用鼠标选择矩阵或插入点定位在矩阵的左侧(或右侧), 按shift + right arrow (或left arrow).
2. 单击  或 .

或者

1. 用插入点定位于矩阵, 点击并拖拉.
2. 单击 , 或选择编辑 + 特性, 增加所要的定界符.

所选择的圆括号或方括号或花括号并不影响矩阵的数学性质. 竖线的括号专指特殊的数学运算(单竖线指数学中的行列式. 双竖线指范数, 在矩阵表示时应该避免使用).

你能使用键盘中的方向键或tab键在矩阵中移动, 也可使用鼠标. 按空格键也能移动位置或离开矩阵.

你能用四种方式创建矩阵: 使用矩阵对话框; 使用键盘快捷键; 选择运算中的子菜单项矩阵: 选择随机矩阵或填充矩阵.

3.1.2 利用矩阵对话框创建矩阵

1. 在数学对象工具栏中单击 , 或选择插入 + 矩阵.
2. 选择行数及列数.
3. 在内置定界符下, 选择没有或任一种可用的内置定界符.
4. 选择确定.
5. 在输入框中输入矩阵元素.

矩阵元素可以是任何有效的数学表达式. 实数或复数, 同样的代数表达式.

3.1.3 从矩阵获取元素

1. 将矩阵定义为某个变量.

2. 再输入该变量，下标为 i, j ，行数 i 与列数 j 应在可能的范围内。
3. 选择计算。

例 3.1

写出矩阵 $A = \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{bmatrix}$ 第2行第3列及第3行第3列的元素。

解：输入 $A = \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{bmatrix}$

► 定义 + 新定义

► 计算

$A_{2,3} = 50;$

$A_{3,3} = 49.$

注意矩阵变量的下标是用逗号分隔的。

3.1.4 计算矩阵的行或列

你也能通过函数 $\text{row}(A, i)$ 及 $\text{col}(A, j)$ 来找出 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的第 i 行或第 j 列。如果自动替换开启，在数学模式下输入这两个函数，函数名会变为灰色。否则，你可以选择插入 + 数学名称对话框。

1. 在数学模式下，输入函数名 row 或 col 。（自动会变为灰色。）
2. 第 i 行：计算 $\text{row}(A, i)$ 。第 j 列：计算 $\text{col}(A, j)$ 。

例 3.2

分别写出矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 的第1,2行及第1,2列。

解：► 计算

$$\text{row}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 1\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{row}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 2\right) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{col}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 1\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix};$$

$$\text{col}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, 2\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3.2 矩阵的运算

矩阵由行与列的元素确定.

定义 3.2

对于矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 与矩阵 $B = (b_{ij})_{s \times t}$, 如果 $m = s, n = t$, 则称 A 与 B 是同型矩阵. 如果还有 $a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称矩阵 A 与 B 相等, 记为 $A = B$. 元素全为零的矩阵称为零矩阵.

例如: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 均是零矩阵, 通常用 $O_2, O_{2 \times 3}, O_{3 \times 2}$ 表示.

矩阵的运算包括: 加法、减法、数乘矩阵、乘法, 同时还要研究矩阵的转置及可逆矩阵.

3.2.1 矩阵的加法与减法

定义 3.3

矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 与矩阵 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 的和 (加法): $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$;

矩阵 A 的负矩阵: $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$;

矩阵 A 与 B 的差 (减法): $A - B = A + (-B)$.

1. 在数学模式下, 输入两个同型的矩阵的和或差.
2. 定位插入点于表达式, 选择计算.

例 3.3

计算: (1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

解: ► 计算

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 10 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -5 & -7 \\ -6 & -6 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

注意相同类型的矩阵（同型矩阵）方能求和或作差．矩阵的加法满足：

$$A + B = B + A; \quad (A + B) + C = A + (B + C), \quad A + O = A, \quad A + (-A) = O.$$

3.2.2 数乘矩阵

定义 3.4

实数 k 乘矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 记为 $kA = (ka_{ij})_{m \times n}$.

1. 输入含数乘矩阵的表达式.
2. 定位插入点于表达式，选择计算.

例 3.4

计算：(1) $-7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; (2) $a \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

解：► 计算

$$(1) -7 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -14 \\ -28 & -21 \end{bmatrix};$$

$$(2) a \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-7b & 2a-8b & 3a-9b \\ 4a-10b & 5a-11b & 6a-12b \end{pmatrix}.$$

矩阵的和及数乘矩阵称为矩阵的线性运算．矩阵的线性运算满足：

$$k(lA) = (kl)A; \quad (k+l)A = kA + lA; \quad k(A+B) = kA + kB, \\ 1A = A, \quad kA = O \iff (k=0 \text{ 或 } A=O).$$

3.2.3 矩阵的转置

定义 3.5

$m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的转置为行与列互换的 $n \times m$ 矩阵： $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$.

► 计算矩阵的转置

1. 定位插入点于矩阵.
2. 选择运算 + 矩阵 + 转置.

例 3.5

写出 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & h & i \end{pmatrix}$ 的转置矩阵.

解: ► 矩阵 + 转置

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & h & i \end{pmatrix}, \text{转置: } \begin{pmatrix} a & d & h \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$

可以使用转置的专门符号, 将矩阵右上标设为 T 再计算.

例 3.6

计算: (1) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T$; (2) $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

解: ► 计算

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}; \\ (2) \quad & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

矩阵的转置满足:

$$(A^T)^T = A; \quad (A+B)^T = A^T + B^T; \quad (kA)^T = kA^T.$$

定义 3.6

对于 $m \times n$ 矩阵 A , 当 $m = n$ 时, 称 A 为 n 阶矩阵 (方阵).

如果 n 阶方阵 A 满足 $A^T = A$, 则称 A 为对称矩阵.

如果 n 阶方阵 A 满足 $A^T = -A$, 则称 A 为反对称矩阵.

从而对于对称矩阵 $A = (a_{ij})$, 必有 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$. 对于反对称矩阵 $A = (a_{ij})$, 必有 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 于是 $a_{ii} = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.

对于任何 n 阶方阵 A , 由 $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$ 知, A 可表示为对称矩阵与反对称矩阵之和.

例 3.7

设 A 是 n 阶对称矩阵, B 是 n 反对称矩阵, 则 $AB + BA$ 是 n 阶反对称矩阵.

证明:

因为 A 是 n 阶对称矩阵, B 是 n 反对称矩阵,则 $(AB+BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T = (-B)A + A(-B) = -(AB+BA)$,故 $AB+BA$ 是 n 阶反对称矩阵.

3.2.4 矩阵的乘法

$1 \times n$ 矩阵称为行向量, $n \times 1$ 矩阵称为列向量. $1 \times n$ 矩阵与 $n \times 1$ 矩阵的乘积是一个数, 也称为向量的内积或点积.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

定义 3.7

矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times k}$ 与矩阵 $B = (b_{ij})_{k \times n}$ 的乘积为矩阵 $C = (c_{ij})_{m \times n}$, 矩阵 C 的第 i 行第 j 列处的元素 c_{ij} 是通过矩阵 A 的第 i 行向量与矩阵 B 的第 j 列向量内积得到的.

$$AB = C, \text{ 其中 } c_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right), i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n.$$

矩阵的乘法

1. 输入矩阵相乘的表达式.
2. 定位插入点于表达式, 选择计算.

例 3.8

计算: (1) $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 8 & -6 & -8 \\ -7 & -9 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 9 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$

解: ► 计算

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd;$$

$$(2) \begin{pmatrix} a & b \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + bd \\ cu + dv \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 20 \\ 44 & 45 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 8 & -6 & -8 \\ -7 & -9 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 9 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 & 34 \\ -128 & -88 \end{pmatrix}.$$

矩阵的乘法满足:

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC); & A(B+C) &= AB+AC; \\ (A+B)C &= AC+BC; & k(AB) &= (kA)B = A(kB); \\ (AB)^T &= B^T A^T. \end{aligned}$$

矩阵的乘法一般不满足交换律. 例如:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, AB \neq BA. \end{aligned}$$

矩阵的乘法也不满足消去律, 即 $AB=AC \nRightarrow B=C$.

矩阵的正整数幂

相同的方阵可以连续相乘, 表示成该矩阵的指数幂的形式.

定义 3.8

设 A 是一个方阵, $A^1 = A$; $A^{n+1} = A^n A$ ($n \in \mathbb{N}, n > 0$).

• 输入矩阵并插入点定位于左侧, 选择  或插入 + 上标, 在输入框中输入指数.

1. 输入矩阵指数幂的表达式.
2. 定位插入点于表达式, 选择计算.

例 3.9

求已知矩阵的正整数次数幂:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^2; (2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5; (3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}^n \quad (n \in \mathbb{N}, n > 0).$$

解: ► 计算

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 20 & 9 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} -10 & 33 \\ -11 & 12 \end{pmatrix};$$

$$(3) \text{ 因为 } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \quad -2 \quad 3), \text{ 故 } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \quad -2 \quad 3)^n.$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \left[(1 \ -2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ -2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdots (1 \ -2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] (1 \ -2 \ 3) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} 4^{n-1} (1 \ -2 \ 3) = 4^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 0).
\end{aligned}$$

方阵的正整数幂满足:

$$A^s A^t = A^{s+t}; \quad (A^s)^t = A^{st}, \quad s, t \in \mathbb{N}.$$

即使 A, B 是同阶方阵,也未必有 $(AB)^s = A^s B^s$. 例如:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (AB)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
A^2 B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (AB)^2 \neq A^2 B^2.
\end{aligned}$$

3.3 单位矩阵与逆矩阵

考察方阵的元素是否为零或1,可以研究特殊的矩阵.

定义 3.9

形如以下的 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

分别称为上三角阵与下三角阵.

特别地, n 阶方阵 A 的主对角元素为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$,其余元素均为零,则称矩阵 A 为对角形矩阵(对角阵).如果对角阵的主对角线上的元素均为1,则称此方阵为 n 阶单位矩阵.

$$\text{例如2,3,4阶单位矩阵: } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3.1 创建 n 阶单位矩阵

您可手工书写任意的 n 阶单位矩阵,也可由用SWP构造.

1. 选择运算 + 矩阵 + 填充矩阵;
2. 再选择填充类型为identity, 设置行数与列数相同的 n 的值, 如取 $n = 3$, 选择确定.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3.2 逆矩阵

实数的乘法满足交换律: $ab = ba$. 当且仅当 $ab = 1$ 时, 有 $b = a^{-1}$ 或 $a = b^{-1}$. 对于矩阵的乘法运算, 如果 $AB = BA = E$, 能引入什么新的概念呢?

定义 3.10

设 A 是 n 阶方阵, 如果存在 n 阶矩阵 B , 满足 $AB = BA = E$, 则称 A 是可逆矩阵, B 是 A 的逆矩阵, 记为 $B = A^{-1}$.

可以证明一个方阵 A 如果有逆矩阵, 则逆矩阵是惟一的, 由此用 A^{-1} 表示 A 的逆矩阵是合理的.

例 3.10

验证: (1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵;
(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: ▶ 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

逆矩阵满足:

$$(A^{-1})^{-1} = A; \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T; \quad (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \quad (k \neq 0); \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

可以证明:

定理 3.1

n 阶方阵 A 可逆的充要条件为存在 n 阶方阵 B , 使得 $AB = E$;
 n 阶方阵 A 可逆的充要条件为存在 n 阶方阵 B , 使得 $BA = E$.

3.3.3 矩阵的多项式

可以计算以方阵为变量的多项式. 此时, $A^0 = E$ (其中 E 是与 A 同阶的单位矩阵).

定义 3.11

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, i = 0, 1, \cdots, n$), A 为方阵 A , 规定 $f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$.

计算方阵的多项式

1. 选择运算 + 定义 + 新定义, 定义矩阵为变量.
2. 计算以矩阵为变量的多项式.

例 3.11

已知 $x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, 求多项式 $x^2 - 5x - 2$ 的值.

解: ► 定义 + 新定义

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

► 计算

$$x^2 - 5x - 2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix};$$

$$x^2 - 5x - 2x^0 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

计算方阵的多项式函数

你也可以定义多项式函数, 再计算以方阵为元的多项式.

1. 定义多项式 $f(x)$, 其中以 x^0 代替常数.
2. 计算以 x 为变量的多项式函数的值.

例 3.12

已知 $f(x) = x^2 - 5x - 2x^0$, 求 $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right)$ 的值.

解: ► 定义 + 新定义

$$f(x) = x^2 - 5x - 2x^0.$$

► 计算

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.4.1 线性方程组转换到矩阵

1. 插入点定位于线性方程组，以创建矩阵（增广矩阵）。
2. 选择运算 + 重写 + 方程作为矩阵形式。
3. 在对话框中输入以逗号分隔的未知量。
4. 选择确定。

例 3.15

将方程组转换为增广矩阵：(1) $\{x+2y=3, 3x-5y=0\}$; (2) $\begin{matrix} x+y-2z=1 \\ 2x-4y+z=0 \\ 2y-3z=-1 \end{matrix}$.

解：► 重写 + 方程作为矩阵形式（未知量列表：x,y 或 x,y,z）

$$(1) \{x+2y=3, 3x-5y=0\}, \text{ 对应矩阵: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{matrix} x+y-2z=1 \\ 2x-4y+z=0 \\ 2y-3z=-1 \end{matrix}, \text{ 对应矩阵: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

线性表达式将被解释为方程，自动设置表达式等于0。

例 3.16

将线性表达式转换为增广矩阵：(1) $\{x+2y-3, 3x-5y\}$; (2) $\begin{pmatrix} x+y-2z-1 \\ 2x-4y+z \\ 2y-3z+1 \end{pmatrix}$.

解：► 重写 + 方程作为矩阵形式（未知量列表：x,y 或 x,y,z）

$$(1) \{x+2y-3, 3x-5y\}, \text{ 对应矩阵: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} x+y-2z-1 \\ 2x-4y+z \\ 2y-3z+1 \end{pmatrix}, \text{ 对应矩阵: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

注意：在将线性方程组转换到矩阵形式时，方程组的左右括号要匹配才能转换。

3.4.2 线性方程的矩阵解法

利用SWP，可直接求解矩阵方程。也可以通过后面的矩阵初等行变换来求解。

- 插入点定位于方程处，单击  或选择运算 + 解方程 + 精确解。

例 3.17

解线性方程组: (1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix};$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$

解: ► 解方程 + 精确解

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} \frac{17}{8} \\ \frac{11}{8} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} 4 - 3\hat{t}_3 \\ 7 - 6\hat{t}_3 \\ \hat{t}_3 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} 4 - \hat{t}_4 - 3\hat{t}_3 \\ 7 - \hat{t}_4 - 6\hat{t}_3 \\ \hat{t}_3 \\ \hat{t}_4 \end{pmatrix}.$$

上述方程的解中, $\hat{t}_3, \hat{t}_4$ 是任意实数. 在首个实例中, 系数矩阵还是可逆的, MuPAD 可以先计算系数矩阵的逆矩阵, 再乘常数向量:

例 3.18

解线性方程组: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

解: ► 计算

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{8} \\ \frac{11}{8} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

3.5 矩阵的初等行变换

线性方程组的初等行变换可移植到矩阵上. 矩阵的初等变换既有行变换也有列变换.

定义 3.12 (矩阵的初等行变换)

1. (倍乘变换) 用一个非零数乘矩阵中的某一行: kr_i ;
2. (对换变换) 交换矩阵中的某两行: $r_i \longleftrightarrow r_j$;
3. (倍加变换) 把矩阵中的一行的某个倍数加到另一行上: $kr_i + r_j$.

在SWP中, 可以通过自定义函数实现矩阵的三种初等行变换.

3.5.1 使用MuPAD函数multRow(x,i,k)进行倍乘变换

1. 选择运算 + 解方程 + 定义MuPAD函数.
2. 对话框中设置如下:
 - **MuPAD 函数名:** linalg::multRow(x,i,k)
 - **Scientific Workplace 名称:** $K(x,i,k)$
 - **MuPAD 函数名**中输入的是MuPAD过程名称, 再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.
3. 选择确定.

此过程定义了函数 $K(x,i,k)$, 其中矩阵为 x , 第 i 行乘常数 k .

例 3.19

矩阵 $\begin{pmatrix} -85 & -55 & 40 \\ 97 & 50 & 79 \\ 49 & 63 & 57 \end{pmatrix}$ 第1行乘 $\frac{1}{5}$.

解: 如上定义函数 $K(x,i,k)$.

► 定义 + 新定义

$$x = \begin{pmatrix} -85 & -55 & 40 \\ 97 & 50 & 79 \\ 49 & 63 & 57 \end{pmatrix}.$$

► 计算

$$K(x, 1, \frac{1}{5}) = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 8 \\ 97 & 50 & 79 \\ 49 & 63 & 57 \end{pmatrix}.$$

3.5.2 使用MuPAD函数swapRow进行对换变换

1. 选择运算 + 解方程 + 定义MuPAD函数.
2. 对话框中设置如下:
 - **MuPAD 函数名:** linalg::swapRow(x,i,j)
 - **Scientific Workplace 名称:** $S(x,i,j)$
 - **MuPAD 函数名**中输入的是MuPAD过程名称, 再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.

3. 选择确定.

此过程定义了函数 $S(x, i, j)$, 其中矩阵为 x , 交换第 i 行与第 j 行.

例 3.20

矩阵 $\begin{pmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \end{pmatrix}$ 交换第1行与第2行.

解: 如上定义函数 $S(x, i, j)$.

► 定义 + 新定义

$$x = \begin{pmatrix} -85 & -55 & -37 & -35 \\ 97 & 50 & 79 & 56 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \end{pmatrix}.$$

► 计算

$$S(x, 1, 2) = \begin{pmatrix} 97 & 50 & 79 & 56 \\ -85 & -55 & -37 & -35 \\ 49 & 63 & 57 & -59 \end{pmatrix}.$$

3.5.3 使用MuPAD函数addRow(x,i,j,k)进行倍加变换

1. 选择运算 + 解方程 + 定义MuPAD函数.

2. 对话框中设置如下:

- **MuPAD** 函数名: `linalg::addRow(x, i, j, k)`
- **Scientific WorkPlace** 名称: $J(x, i, j, k)$
- **MuPAD** 函数名中输入的是MuPAD过程名称, 再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.

3. 选择确定.

此过程定义了函数 $J(x, i, j, k)$, 其中矩阵为 x , 第 i 行乘常数 k 加到第 j 行上.

例 3.21

矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ 第1行乘-3加到第2行上.

解: 如上定义函数 $J(x, i, j, k)$.

► 定义 + 新定义

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

► 计算

$$J(x, 1, 2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5.4 Guass消元法及行阶梯形矩阵

线性方程组的Guass消元法，应用于对应的增广矩阵上，可选择运算 + 矩阵下的子菜单：分数自由高斯消元法（Fraction-Free Gaussian Elimination）、高斯消元法（Gaussian Elimination）、行最简阶梯形矩阵（Reduced Row Echelon Form）。

可以从上面三种操作得到：

定义 3.13（行阶梯形矩阵）

1. 每个阶梯占一行；
2. 每个阶梯首元是非零数；
3. 阶梯以下全为零。

例如，如下的矩阵是行阶梯矩阵。

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & \textcircled{-3} & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 3.22

将矩阵化为行阶梯形矩阵：(1) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ ；(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$

解：

► 矩阵 + 分数自由高斯消元法

(1) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$, 分数自由高斯消元法: $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & -44 & 58 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 分数自由高斯消元法: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -cb + ad \end{pmatrix}.$

► 矩阵 + 高斯消元法

$$(1) \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}, \text{高斯消元法: } \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{29}{4} \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{高斯消元法: } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a}(ad-bc) \end{pmatrix}.$$

► 矩阵 + 行最简阶梯形矩阵

$$(1) \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{31}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{29}{22} \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5.5 矩阵转换到线性方程组

对矩阵进行初等行变换，最终可得到：

定义 3.14 (行最简行阶梯形矩阵)

1. 阶梯形矩阵;
2. 阶梯首元为1;
3. 阶梯首元所在列的其余元素全为零.

例如，如下的矩阵是行最简阶梯矩阵.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

再将矩阵改写为对应的同解线性方程组：

1. 插入点定位于矩阵.
2. 选择运算 + 重写 + 矩阵作为方程形式.
3. 在对话框中输入以逗号分隔的未知量，选择确定.

例 3.23

将矩阵转换为方程组：(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{31}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{29}{22} \end{pmatrix}$.

解：► 重写 + 矩阵作为方程形式 (变量列表: x_1, x_2, x_3 或 x_1, x_2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{对应方程: } \{x_2 - \frac{5}{6}x_3 = \frac{1}{3}, x_1 - \frac{7}{6}x_3 = \frac{2}{3}, 0 = 0\};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{31}{44} \\ 0 & 1 & -\frac{29}{22} \end{pmatrix}, \text{对应方程: } \{x_2 = -\frac{29}{22}, x_1 = \frac{31}{44}\}.$$

上面的线性方程组的形式写在了同一行上, 可以选择**矩阵 + 重组**改写成一行多行的形式.

例 3.24

将方程组写出普通形式:

$$(1) \{x_2 - \frac{5}{6}x_3 = \frac{1}{3}, x_1 - \frac{7}{6}x_3 = \frac{2}{3}, 0 = 0\}; (2) \{x_2 = -\frac{29}{22}, x_1 = \frac{31}{44}\}.$$

解: ► 矩阵 + 重组 (选择 1 列)

$$(1) \{x_2 - \frac{5}{6}x_3 = \frac{1}{3}, x_1 - \frac{7}{6}x_3 = \frac{2}{3}, 0 = 0\}, \begin{cases} x_2 - \frac{5}{6}x_3 = \frac{1}{3} \\ x_1 - \frac{7}{6}x_3 = \frac{2}{3} \\ 0 = 0 \end{cases},$$

$$\text{从而方程组的解为} \begin{cases} x_2 = \frac{5}{6}x_3 + \frac{1}{3}, \\ x_1 = \frac{7}{6}x_3 + \frac{2}{3}, \\ x_3 = x_3, \end{cases} \quad (x_3 \text{ 为任意实数}).$$

$$(2) \{x_2 = -\frac{29}{22}, x_1 = \frac{31}{44}\}, \begin{cases} x_2 = -\frac{29}{22} \\ x_1 = \frac{31}{44} \end{cases}.$$

在SWP中, 可以展示解线性方程组的中间过程.

例 3.25

对增广型矩阵进行初等行变换解线性方程组:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1. \end{cases}.$$

解:

$$\begin{pmatrix} -2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{pmatrix}, \text{对应矩阵: } \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \text{对应方程: } \{x_2 = 0, x_1 = -\frac{1}{5}, x_3 = -\frac{3}{5}\},$$

$$\{x_2=0, x_1=-\frac{1}{5}, x_3=-\frac{3}{5}\}, \begin{cases} x_2=0 \\ x_1=-\frac{1}{5} \\ x_3=-\frac{3}{5} \end{cases}.$$

►展示计算过程:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2, \quad 2r_1+r_2, -2r_1+r_3]{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \end{pmatrix}} \xrightarrow{5r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -20 & 12 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{-\frac{1}{20}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[2r_3+r_1]{5r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \text{原方程的解为} \begin{cases} x_1=-\frac{1}{5}, \\ x_2=0, \\ x_3=-\frac{3}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

在SWP中, 直接求解线性方程组.

例 3.26

对增广型矩阵进行初等行变换解线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5, \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

解: ► 解方程 + 精确解

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5 \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \end{cases}, \text{解是: } [x_1 = \frac{1}{2}x_4 - \frac{9}{7}x_3 + 1, x_2 = \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - 2].$$

►展示计算过程:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3r_1+r_2, \quad r_1+r_3, \quad -5r_1+r_4]{\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & 28 & -4 & 14 & -56 \end{pmatrix}} \\ & \xrightarrow[-r_2+r_3, \quad 2r_2+r_4]{\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow{-\frac{1}{14}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{5r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{故原方程的解为} \begin{cases} x_1 = -\frac{9}{7}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + 1, \\ x_2 = \frac{1}{7}c_1 - \frac{1}{2}c_2 - 2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2 \end{cases} \end{aligned}$$

(c_1, c_2 为任意实数).

对于含有参数的线性方程组, 需讨论参数的取值, 以便确定线性方程组解的情形.

例 3.27

设线性方程组:
$$\begin{cases} -2x_3 - 8x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = a, \end{cases}$$
 当 a 为何值时, (1) 当 a 为何值时, 无解;
(2) 当 a 为何值时, 有无穷多个解, 并求出通解.

解:
$$\begin{cases} -2x_3 - 8x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = a \end{cases}, \text{解是:}$$

$$\begin{cases} \{[x_1 = -2x_2 + 3x_4 - 1, x_3 = -4x_4 + 3]\} & \text{if } a = 4, \\ \emptyset & \text{if } a \neq 4. \end{cases}$$

► 展示计算过程:

$$\begin{cases} -2x_3 - 8x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = a \end{cases}, \text{对应矩阵: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -8 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & a \end{pmatrix},$$

高斯消元法:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix},$$

(1) 当 $a \neq 4$ 时, $\text{rank}(A) = 3 \neq 4 = \text{rank}(A|b)$, 无解;

(2) 当 $a = 4$ 时, $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = 3 < 4$, 有无穷多解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对应方程: $\{x_3 + 4x_4 = 3, 0 = 0, x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -1\}, \begin{cases} x_3 + 4x_4 = 3 \\ 0 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -1 \end{cases},$

故
$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 - 1, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = -4c_2 + 3, \\ x_4 = c_2 \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意实数}).$$

3.6 本章概括

1. 基本概念: 矩阵 (A)、行 (列) 向量、增广矩阵 ($(A|b)$)、系数矩阵; 对角矩阵、对称矩阵、反对称矩阵;
2. 矩阵相等 **【 $A = B$ 】**;
3. 矩阵运算: 加法 ($A+B$)、乘法 (AB)、数乘 (kA)、转置 (A^T);
 - 运算性质;
 - 逆矩阵定义及性质 **【 A^{-1} 】**;
4. 初等行变换及线性方程组的矩阵解法:
 - $\textcircled{i} \times k$; $\textcircled{i} \longleftrightarrow \textcircled{j}$; $\textcircled{i} \times k + \textcircled{j}$.

(倍乘变换: kr_i , 对换变换: $r_i \longleftrightarrow r_j$, 倍加变换: $kr_i + r_j$)

♠ 相关数学史

在数学中, 矩阵 (Matrix) 是一个按照长方阵列排列的复数或实数集合最早来自于方程组的系数及常数所构成的方阵. 这一概念由19世纪英国数学家凯利首先提出.



英国数学家凯利

矩阵的现代概念在19世纪逐渐形成. 1800年代, 高斯和威廉·若尔当建立了高斯—若尔当消去法. 1844年, 德国数学家费迪南·艾森斯坦 (F.Eisenstein) 讨论了“变换” (矩阵) 及其乘积. 1850年, 英国数学家詹姆斯·约瑟夫·西尔维斯特 (James Joseph Sylvester) 首先使用矩阵一词.

3.7 从做中学

练习 3.1

一、填空题

1. 设 A, B, C 是同型的矩阵, 则 $A + (B + C) - (A + B) =$ _____,
 $A(B + C) - (AB + AC) =$ _____.
2. $(AB)^T =$ _____. 设 k 是常数, 则 $(kA)^T =$ _____.

二、解答题

3. 已知 $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
 计算: (1) $A + B$; (2) $A - B$; (3) $4A + 3B - 2C$.
4. 若 A, B 为同阶方阵, 则 $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ 的充要条件是什么?
5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
 计算 AB 及 $A^T C^T$.
6. 计算下列矩阵的乘积:
 (1) $(1, 2, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1, -1)$; (3) $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
7. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$, a_1, a_2, a_3 为互不相等的非零实数, 求所有与 A 交换的矩阵.

8. 已知 $n \in \mathbf{N} (n > 0)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^n .

练习 3.2

一、填空题

1. 设 A 是 n 阶矩阵, 如果 $A^T =$ _____, 则称 A 为对称矩阵;
如果 $A^T =$ _____, 则称 A 为反对称矩阵.
2. 已知 A, B 为可逆矩阵, 且常数 $k \neq 0$, 则 $(kA)^{-1} =$ _____,
 $(AB)^{-1} =$ _____. 已知 A 为可逆矩阵, 则 $(A^T)^{-1} =$ _____.

二、解答题

3. 已知 $f(x) = x^2 - 8x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 是一个 2 阶矩阵, 求 $f(A)$.
4. 已知方阵 A 满足 $A^2 + 2A - 3E = 0$, 证明: A 及 $A - 2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A - 2E)^{-1}$.
5. 将下列矩阵化为行阶梯形矩阵及行最简阶梯形矩阵:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix}; \quad (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. 对增广矩阵作初等行变换求解线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$
7. 对增广矩阵作初等行变换求解线性方程组:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$$
8. 对增广矩阵作初等行变换求解线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4 — 矩阵的初等变换与线性方程组

学习目标与要求

1. 了解分块矩阵的概念及运算, 理解矩阵的初等变换.
2. 了解初等矩阵的概念, 掌握初等矩阵与初等变换的关系.
3. 理解矩阵秩的概念, 会用初等变换求矩阵的秩.
4. 会用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵.

对 n 阶单位矩阵进行三种初等变换得到对应的矩阵称为初等矩阵. 用初等矩阵左乘行变换(或右乘列变换), 可以建立矩阵初等变换下矩阵的等量关系. 通过将矩阵进行初等行变换为行阶梯形矩阵求出矩阵的阶梯数, 从而用来判别线性方程组是否有解等.

4.1 分块矩阵

矩阵是一个二维表格，大表格可以拆分成小表格，小表格按要求合并起来可成为一个大表格. 对于这样的拆分、合并，要求拆分的线、合并起来的边线都是上下、左右对齐的.

n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \quad \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (\text{I})$$

的系数矩阵 A 与常数向量 b 形成的增广矩阵就是分块矩阵:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

如果令矩阵 A 的第 j 列为 $\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} (j = 1, 2, \dots, n)$, 则有分块矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$; 如

果令矩阵 A 的第 i 行为 $\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) (i = 1, 2, \dots, m)$, 则有分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$.

4.1.1 子矩阵及矩阵的合并与堆积

分块矩阵的每个块均是矩阵的子矩阵, 某些子矩阵可构成新的矩阵.

使用MuPAD函数submatrix得到矩阵的子矩阵

1. 选择运算 + 解方程 + 定义MuPAD函数.
2. 对话框中设置如下:
 - **MuPAD** 函数名: `linalg::submatrix(x,i..m,j..n)`
 - **Scientific WorkPlace** 名称: $M(x, i..m, j..n)$
 - **MuPAD** 函数名中输入的是MuPAD过程名称, 再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.
3. 选择确定.

此过程定义了函数 $M(x, i..m, j..n)$, 其中矩阵为 x , $i..m$ 应取 x 中的行列表, $j..n$ 应取 x 中的列列表.

例 4.1

写出矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ 的子矩阵: (1) 第1,2,3行、第1,2列; (2) 第1,2,3行、第3,4,5列; (3) 第4行、第1,2列; (4) 第4行、第3,4,5列.

解: 如上定义函数 $M(x, i, m, j, n)$.

► 定义 + 新定义

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

► 计算

$$(1) M(A, 1, 3, 1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$(2) M(A, 1, 3, 3, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(3) M(A, 4, 4, 1, 2) = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$(4) M(A, 4, 4, 3, 5) = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的合并及堆积

行数相同的两个矩阵可以左右合并成一个矩阵，列数相同的两个矩阵可以上下堆积成一个矩阵。

例 4.2

将两个矩阵左右合并成一个矩阵：(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

(2) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$

将两个矩阵上下堆积成一个矩阵：(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

解：► 定义 + 新定义

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

► 计算

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}.$$

没有显示预期的 4×5 矩阵。

► 矩阵 + 合并

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{合并: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \text{合并: } \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

► 矩阵 + 堆积

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \text{堆积: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意：在进行矩阵左右合并或上下堆积成矩阵时，输入的两个矩阵中间没有间隔符号，不要与矩阵乘法相混。

4.1.2 分块矩阵的运算

与矩阵一样，分块矩阵也有加法、减法、数乘矩阵、转置及逆矩阵，但在SWP中还无法直接实现。

定义 4.1

设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，在 A 的行之间及列之间进行划分，矩阵 A 可写成 $A = (A_{ij})_{s \times t}$ ，其中 A_{ij} 是 $m_i \times n_j$ 矩阵， $i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, t, m = \sum_{i=1}^s m_i, n = \sum_{j=1}^t n_j$ 。称 A_{ij} 为 A 的一个分块，分了块的矩阵 $(A_{ij})_{s \times t}$ 称为分块矩阵。

1. 分块矩阵 $A = (A_{ij})_{s \times t}$ 与分块矩阵 $B = (B_{ij})_{s \times t}$ 的和（加法）： $A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{s \times t}$ ，其中 A_{ij} 与 B_{ij} 是同型矩阵；
分块矩阵 A 的负矩阵： $-A = (-A_{ij})_{s \times t}$ ；分块矩阵 A 与 B 的差（减法）： $A - B = A + (-B)$ 。
2. 实数 k 乘分块矩阵 $A = (A_{ij})_{s \times t}$ 为 $kA = (kA_{ij})_{s \times t}$ ；
3. 分块矩阵 $A = (A_{ij})_{s \times t}$ 的转置为 $t \times s$ 分块矩阵： $A^T = (A_{ji}^T)_{t \times s}$ ；
4. $s \times t$ 分块矩阵 $A = (A_{ij})_{s \times t}$ 与 $t \times l$ 分块矩阵 $B = (B_{ij})_{t \times l}$ 的乘积是 $s \times l$ 分块矩阵 $C = (C_{ij})_{s \times l}$ ，矩阵 C 的第 i 行第 j 列处的元素 C_{ij} 是通过分块矩阵 A 的第 i 行向量与分块矩阵 B 的第 j 列向量内积得到的。

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^t A_{ik} B_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, l),$$

其中分块 A_{ik} 的列数与分块 B_{kj} 的行数相等 ($k = 1, 2, \dots, t$)。

形如 $\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_n \end{pmatrix}$ 的分块矩阵称为对角矩阵，如果 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 都是可逆矩阵，则有

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

例 4.3

求 $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: 令 $A = \begin{pmatrix} B & O_{1 \times 2} \\ O_{2 \times 1} & C \end{pmatrix}$, 其中 $B = (5)$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. $B^{-1} = (\frac{1}{5})$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, 从而 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

SWP中分块矩阵的定义

在SWP中对分块矩阵操作功能非常有限.

例 4.4

定义矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, 并计算 (1) $BG + CH$; (2) $DG + FH$; (3) $\begin{pmatrix} BG + CH \\ DG + FH \end{pmatrix}$.

解: ► 定义 + 新定义

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

► 计算

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix}.$$

没有得到预期的矩阵相乘的结果, 只能每个元素单独计算了.

► 计算

$$(1) BG + CH = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 23 \end{pmatrix};$$

$$(2) DG + FH = 109;$$

$$(3) \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BG + CH \\ DG + FH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 23 \\ 109 \end{pmatrix}.$$

使用MuPAD函数`substitute`替换矩阵中的子矩阵进行分块矩阵的运算

1. 选择运算 + 解方程 + 定义MuPAD函数.
 2. 对话框中设置如下:
 - **MuPAD** 函数名: `linalg::substitute(x,y,i,j)`
 - **Scientific WorkPlace** 名称: $I(x,y,i,j)$
 - **MuPAD** 函数名中输入的是MuPAD过程名称, 再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.
 3. 选择确定.
- 此过程定义了函数 $I(x,y,i,j)$, 其中用矩阵 y 替换矩阵 x 中第 i 行、第 j 列开始的子矩阵.

例 4.5

如上定义函数 $I(x,y,i,j)$. 给定矩阵 $BG+CH$ 替换矩阵 P 中第1行、第1列开始的子矩阵, 给定矩阵 $DG+FH$ 替换矩阵 $I(P,BG+CH,1,1)$ 中第4行、第1列开始的子矩阵.

解: ► 定义 + 新定义

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

► 矩阵 + 填充矩阵 + zero, 并定义

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

► 计算

$$I(P, BG + CH, 1, 1) = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$DG + FH = 109,$$

$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BG+CH \\ DG+FH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 23 \\ 109 \end{pmatrix}.$$

通过分块矩阵的运算, 线性方程组(I)可以用系数矩阵 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 及常数向量 b 表示为 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$, 即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = b$ 的形式.

4.2 初等矩阵与初等变换

矩阵通过初等变换转化成行阶梯形矩阵, 最终转化成行最简阶梯形矩阵. 如何建立变换后的矩阵间的等量关系? 可以通过单位矩阵经过初等变换后得到的矩阵来研究.

4.2.1 初等矩阵

初等的行(列)变换有三种变换: 对换变换、倍乘变换及倍加变换.

定义 4.2

对单位矩阵作一次初等行变换或初等列变换所得到的矩阵称为初等矩阵.

故对应有三类初等矩阵:

1. 选择矩阵 + 填充矩阵.
2. 在对话框中作出适当选择创建单位矩阵.
3. 对单位矩阵进行三种初等行变换之一得到对应的初等矩阵.

对换变换: 单位矩阵交换第 i 行与第 j 行, 记为 $E(i, j)$;

倍乘变换: 单位矩阵第 i 行乘以实数 k , 记为 $E(i(k))$;

倍加变换: 单位矩阵第 j 行乘以实数 k 加到第 i 行上, 记为 $E(i, j(k))$.

例 4.6

已知 E 是3阶单位矩阵, 试写出对换变换 $r_2 \leftrightarrow r_3$ 、倍乘变换 λr_2 及倍加变换 $\lambda r_3 + r_1$ 对应的初等矩阵.

解: ▶ 定义 + 新定义

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在SWP中, 利用初等变换对应的MuPAD函数 $S(x, i, j), K(x, i, k), J(x, i, j, k)$, 得到

▶ 计算

$$\text{对换变换 } r_2 \leftrightarrow r_3 \text{ 对应的矩阵: } S(E, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

倍乘变换 λr_2 对应的矩阵: $K(E, 2, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

倍加变换 $\lambda r_3 + r_1$ 对应的矩阵: $J(E, 3, 1, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

4.2.2 对矩阵进行初等行变换

1. 创建需要行变换的矩阵.
2. 在所需行变换的矩阵上左乘所需行变换的对应的初等矩阵.
3. 选择计算.

定理 4.1

对矩阵作初等行变换相当于左乘相应的初等矩阵; 对矩阵作初等列变换相当于右乘相应的初等矩阵.

用以下实例加以说明.

例 4.7

利用左乘初等矩阵, 对 $\begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 进行行变换: (1) 交换第 2 行与第 3 行; (2) 第 2 行乘 λ ; (3) 第 3 行乘上 λ 加到第 1 行上.

解: ► 计算

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}; \\ (2) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 3\lambda & -6\lambda & 2\lambda \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \\ (3) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 4\lambda - 2 & \lambda - 1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.3 矩阵的秩

如果一个矩阵 A 通过初等变换为另一个矩阵 B , 则称 A 与 B 等价, 记为 $A \sim B$.

定理 4.2

任意的 $m \times n$ 矩阵 A 必定等价于一个分块矩阵 $E_{m \times n}^{(r)} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 当 $r = 0$ 时, $E_r = O$; 当 $r > 0$ 时, E_r 是 r 阶单位矩阵.

定义 4.3

称上述定理中的 r 为矩阵 A 的秩, 记为 $\text{rank}(A)$ 或 $r(A)$.

可以证明:

定理 4.3

1. 若 A 与 B 等价, 则 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$;
2. $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$.

于是, 求矩阵 A 的秩, 只要对矩阵进行初等行变换化成行阶梯形矩阵, 计算其阶梯数即可.

4.3.1 求矩阵的秩

1. 插入点定位于矩阵.
2. 选择选择运算 + 矩阵 + 秩 (或选择运算 + 矩阵 + 行最简阶梯形矩阵).

例 4.8

求矩阵 $\begin{pmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -16 & -3 \\ 8 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩.

解: ► 矩阵 + 秩

$$\begin{pmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -16 & -3 \\ 8 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \text{秩: } 2.$$

► 矩阵 + 分数自由高斯消元法, 矩阵 + 秩

$$\begin{pmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & -16 & -3 \\ 8 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \text{分数自由高斯消元法: } \begin{pmatrix} -8 & -5 & 7 & -2 \\ 0 & -5 & -121 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

秩: 2.

4.3.2 线性方程组有解的充要条件

由于总可以通过初等行变换将 n 元线性方程组 $Ax = b$ 的增广矩阵化成行阶梯形矩阵, 故可比较系数矩阵 A 的秩与增广矩阵 $(A|b)$ 的秩来判定线性方程组解的情形:

定理 4.4

1. n 元线性方程组 $Ax = b$ 有解的充要条件: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$.
2. n 元线性方程组 $Ax = b$ 有惟一解的充要条件: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = n$.
3. n 元线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充要条件: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) < n$.
4. n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解的充要条件: $\text{rank}(A) = n$.
5. n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充要条件: $\text{rank}(A) < n$.

例 4.9

$$\text{判断方程组} \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5, \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1. \end{cases} \text{ 是否有解?}$$

$$\text{解: } \begin{pmatrix} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5 \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \end{pmatrix}, \text{ 对应矩阵: } \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 秩: } 2;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -9 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 秩: } 2, \text{ 由于增广矩阵的秩与系数矩阵的秩相同为 } 2, \text{ 但小于 } 4, \text{ 则}$$

原线性方程组有解且有无穷多个解.

4.4 逆矩阵的判别及求法

如果方阵 A 是一个可逆矩阵, 则线性方程组 $Ax = b$ 必有惟一解 $x = A^{-1}b$. 因此判断一个方阵是否可逆很重要.

4.4.1 逆矩阵的判别

按照 n 阶矩阵 A 可逆的定义, 要求找到 n 阶矩阵 B , 使其 $AB = E$ 或 $BA = E$. 去解 n^2 元线性方程组显然是不现实的. 可以证明如下定理.

定理 4.5

1. n 阶矩阵 A 可逆当且仅当 $\text{rank}(A) = n$.
2. n 阶矩阵 A 可逆当且仅当存在初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s$ 使得 $A = P_1 P_2 \cdots P_s$.
3. 设 A 是阶方阵 A , 若对 A 作一系列初等变换使之转化为 E , 则相同的变换将 E 转化为 A^{-1} .

由此可得到求逆矩阵的方法:

如果 n 阶方阵 A 的 $\text{rank}(A) = n$, E 为同阶的单位矩阵, 则可将分块矩阵 $(A|E)$ 进行若干次初等行变换, 最后得到 $(E|A^{-1})$.

例 4.10

判别矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -9 & 0 \\ 3 & -1 & -16 & -1 \\ -4 & 2 & 22 & 3 \end{pmatrix}$ 是否可逆?

解: $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -9 & 0 \\ 3 & -1 & -16 & -1 \\ -4 & 2 & 22 & 3 \end{pmatrix}$, 秩: 3, 小于4, 故 A 不可逆.

► 展示计算过程:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -9 & 0 \\ 3 & -1 & -16 & -1 \\ -4 & 2 & 22 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2r_1 + r_3, \\ -3r_1 + r_4, \\ 4r_1 + r_5}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -11 & -14 \\ 0 & -19 & -19 & -22 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-3r_2 + r_3, \\ 5r_2 + r_4, \\ -r_2 + r_5}} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_3 + r_4, \\ -4r_3 + r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{45}r_2, \\ 6r_2 + r_4, \\ -2r_2 + r_5}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{rank}(A) = 3 < 4, \text{故} A \text{不可逆}.
 \end{aligned}$$

4.4.2 求可逆矩阵的逆矩阵

- 插入点定位于矩阵, 选择运算 + 矩阵 + 逆矩阵. 或
- 将矩阵右上标设为 -1 , 选择计算.

或

- 插入点定位于矩阵（所求矩阵与同阶单位矩阵左右合并成新的矩阵），选择运算 + 矩阵 + 行最简阶梯形矩阵.

例 4.11

计算 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: ► 矩阵 + 求逆

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \text{逆矩阵: } \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

► 计算

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

► 矩阵 + 行最简阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ 0 & 1 & \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

检验所求逆矩阵是否正确，可以检验是否满足逆矩阵的乘法定义.

例 4.12

检验 $\begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: ► 计算

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 4.13

求矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 逆矩阵: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

►展示计算过程:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{\frac{1}{2}r_1,} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3r_1+r_2, \\ -r_1+r_3}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{2r_2+r_3} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{2r_3+r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{7}{2} & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{-3r_2+r_1} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{array} \right). \text{故} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{的逆矩阵为} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 4.14

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: 矩阵 A 是一个对角的分块矩阵 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 其中 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 可先求出 B^{-1} :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right), \text{行最简阶梯形:} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right), B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{从而} \\ & A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.4.3 计算可逆矩阵的负整数幂

由于 $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, 你可以计算负整数次幂的矩阵.

1. 输入所需表达式.

2. 插入点定位于表达式, 选择计算.

例 4.15

计算 $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{-3}$.

解: ► 计算

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{-3} = \begin{pmatrix} -\frac{1255}{2197} & \frac{942}{2197} \\ \frac{1256}{2197} & -\frac{941}{2197} \end{pmatrix}.$$

如下展示如何利用公式求 $A^{-3} = (A^3)^{-1}$ 负整数次幂矩阵.

解: ► 计算

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 941 & 942 \\ 1256 & 1255 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 941 & 942 \\ 1256 & 1255 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1255}{2197} & \frac{942}{2197} \\ \frac{1256}{2197} & -\frac{941}{2197} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.5 矩阵方程

设 P, Q 为矩阵, 对于矩阵方程 $PX = Q$, 如何求解 X ? 当 Q 是列向量时, 可以用线性方程组的矩阵方法 (对增广矩阵进行初等行变换) 求解. 同样行变换的方法可移植到此类矩阵方程的解法上.

例 4.16

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, (4A - 2B)X = C$, 求 X .

解: 方法1

(1) ► 定义 + 新定义

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

(2) ► 解方程 + 精确解

$$(4A - 2B)X = C, \text{ 解是: } \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

☞ 可以这样求解 (方法2):

(1) ► 计算

$$(4A - 2B) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 12 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

(2) ► 矩阵 + 求逆

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 12 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \text{逆矩阵: } \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

(3) ► 计算

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

☞ 也可以这样求解 (方法3):

(1) ► 矩阵 + 合并

$$(4A - 2B)C, \text{合并: } \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 12 & -2 & 6 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

(2) ► 矩阵 + 行最简阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 12 & -2 & 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

(3) 所求矩阵: $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

注意: 方法3即是矩阵方程的矩阵解法.

对于形如 $XP = Q$ 的矩阵方程, 可先对方程的两边矩阵进行转置: $P^T X^T = Q^T$, 应用上述行变换的矩阵方法求出 X^T , 再转置得到 X ; 当然也可应用列变换的方法直接求出 X .

4.6 本章概括

1. 分块矩阵;

基本运算: 数乘、加法、乘法;

2. 初等矩阵及初等变换:

- $E(i, j): \textcircled{1} \longleftrightarrow \textcircled{j}; \quad (r_i \longleftrightarrow r_j, c_i \longleftrightarrow c_j);$
- $E(i(k)): \textcircled{1} \times k; \quad (kr_i, kc_i);$
- $E(i, j(k)): \textcircled{1} \times k + \textcircled{j}; \quad (kr_j + r_i, kc_i + c_j).$

3. 矩阵的等价;

• 矩阵等价的充要条件:

$$A \sim B \iff P_1 P_2 \cdots P_s A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = B.$$

• 矩阵的秩定义 **【rank(A)】**;

• 秩的性质:

$$(1) A \sim B \iff \text{rank}(A) = \text{rank}(B);$$

$$(2) \text{rank}(A) = \text{rank}(A^T).$$

• 求矩阵的秩 **【初等变换】**;

- 线性方程有解的条件;
 - 齐次线性方程组有非零解的充要条件;
 - 可逆矩阵的充要条件: A 可逆 $\iff \text{rank}(A) = n$.
4. 求逆矩阵的方法【初等变换】:
 $A = P_1 P_2 \cdots P_s$ (初等矩阵之积): $(A|E) \rightarrow \cdots \rightarrow (E|A^{-1})$;
5. 求矩阵方程的方法:
 $AX = B, A$ 可逆, 则 $X = A^{-1}B$, 或 $(A|B) \rightarrow \cdots \rightarrow (E|X)$.

4.7 从做中学

练习 4.1

一、填空题

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB - 2B =$ _____.
2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $AB - B =$ _____.
3. (1) 已知 A 和 B 均为可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} =$ _____.
- (2) 已知 A 和 B 均为可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} =$ _____.
4. 设 $A = PBQ$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $B =$ _____.

二、解答题

5. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.
6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.
7. 用初等行变换将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 化为行阶梯形矩阵、行最简阶梯形矩阵.

8. 已知 $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,
求 $P_1^{2016} A P_2^{2017}$.

练习 4.2

一、填空题

1. 设 $A_{m \times n}$, $(A|b)$ 分别为线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵与增广矩阵, 则 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是 _____.
有惟一解的充分必要条件是 _____.
有无穷多个解的充分必要条件是 _____.
2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $\text{rank}(A) =$ _____.
3. 已知3阶矩阵 A 的秩为2, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 AB 的秩为 _____.

二、解答题

4. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩.
5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & -9 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, 求 $\text{rank}(A)$.
6. 设 $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $\text{rank}(A)$.
7. 设 $(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是线性方程组的增广矩阵, 用矩阵的秩判断此方程组解的情形.
8. 用矩阵的秩判断线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$ 解的情形.

练习 4.3

一、选择题

1. 下列矩阵与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 乘法可交换的是 ()
- A. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. 设矩阵 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆阵, 则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} =$ ()
- A. $A^{-1}+B^{-1}$ B. $A(A+B)^{-1}B$ C. $(A+B)^{-1}$ D. $A+B$

二、填空题

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, 则 $AB^T =$ _____.
4. (1) 已知 A 和 B 均为可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$ _____.
- (2) 已知 A 和 B 均为可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} =$ _____.

三、解答题

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = P^{-1}AP$, 其中 P 为 3 阶可逆阵, 求:
- (1) A^4 ; (2) A^{2004} ; (3) $B^{2004} - 2A^2$.
6. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & x \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 则 $x =$ _____.
7. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 + 5A - 4E = 0$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵, 证明: A 可逆, 并求其逆矩阵.
8. 讨论 k 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + kx_2 + x_3 = k, \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k^2 \end{cases}$
- (1) 有惟一解; (2) 有无穷多个解; (3) 无解.

5 — 向量组与线性方程组的解空间

学习目标与要求

1. 了解齐次线性方程组的解空间及向量空间的概念.
2. 理解向量组的线性相关、线性无关的概念及性质.
3. 会求向量组的极大线性无关组与秩.
4. 理解向量空间的基、维数及坐标的概念, 会求坐标及过渡矩阵.
5. 会求齐次线性方程组的基础解系及解, 掌握线性方程组的解的求法.

线性方程组 $Ax = b$ 可以用系数矩阵 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 及常数向量 b 表示为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = b$, 因此可以用向量是来研究线性方程组的解, 同时可研究其解的结构. 中学数学学习过2维平面向量 $a = (a_1, a_2)$, 3维空间向量 $a = (a_1, a_2, a_3)$. 现在进一步学习 n 维向量 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

5.1 向量的概念

可以用如下任何一种方法表示向量.

- 3维向量: $(2, -1, 0), (x_1, x_2, x_3), [3, 2, 1], [x_1, x_2, x_3]$;
- $1 \times n$ 矩阵 ($n = 3, 6, 4$): $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 & 17 & -8 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$;
- $n \times 1$ 矩阵 ($n = 3, 2, 2$): $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 35 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

上述方式轻松方便, 以便以前的输入或输出用于向量的运算.

5.1.1 以矩阵形式构作向量

1. 单击  或选择插入 + 矩阵.
2. 设置行数 (或列数) 为1及向量的维数.
3. 在输入框中输入元素.
1. 用鼠标选择向量并单击括号按钮以限定向量.

5.1.2 以列表形式构造向量

1. 单击括号按钮  或 ; 或单击按钮模板 ，选择相应的括号; 或按 ctrl + 9.
2. 插入点定位于括号中，输入用逗号分隔的元素.

5.1.3 使用MuPAD函数col扩展版得到矩阵列向量（组）

1. 选择运算 + 解方程 + 定义MuPAD函数.
2. 对话框中设置如下:
 - **MuPAD 函数名:** `linalg::col(x,i..j)`
 - **Scientific WorkPlace 名称:** $C(x,i..j)$
 - **MuPAD 函数名中输入的是MuPAD过程名称**，再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.
3. 选择确定.

此过程定义了函数 $C(x,i..j)$, 其中矩阵为 x , $i..j$ 为矩阵某些列的列表.

例 5.1

写出矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 的 (1) 第2列; (2) 第1,2列; (3) 第1,2,3列向量 (组).

解: 如上定义函数 $C(x,i..j)$.

► 定义 + 新定义

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

► 计算

$$(1) C(A,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$(2) C(A,[1,2]) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right],$$

$$(3) C(A,[1,3,2]) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right].$$

5.2 向量的和与数乘向量

定义 5.1

向量 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与 $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 的和为

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

数 a 乘向量 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为

$$a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).$$

这与矩阵的行向量之和及数乘行向量是一致的.

5.2.1 计算向量的和

在数学模式下输入同维的向量的运算表达式, 并选择计算.

例 5.2

计算: (1) $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)$; (2) $(2, -1, 0) + (2, 3, -5)$; (3) $[1, 2, 3, 4, 3] - [3, -5, 1, 6, 0]$; (4) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$; (5) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$; (6) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & z \end{bmatrix}$.

解: ► 计算

$$(1) (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3);$$

$$(2) (2, -1, 0) + (2, 3, -5) = (4, 2, -5);$$

$$(3) [1, 2, 3, 4, 3] - [3, -5, 1, 6, 0] = (-2, 7, 2, -2, 3);$$

$$(4) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix};$$

$$(5) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$(6) \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w+x & y+z \end{bmatrix}.$$

5.2.2 计算数乘向量

在数学模式下输入数乘向量的运算表达式, 并选择计算.

例 5.3

计算: (1) $a[x_1, x_2, x_3]$; (2) $6[2, 3, -5]$; (3) $k(x, y, z)$.

解: ► 计算

- (1) $a \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 & ax_2 & ax_3 \end{bmatrix}$;
 (2) $6 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 & -30 \end{bmatrix}$;
 (3) $k(x, y, z) = \begin{pmatrix} kx & ky & kz \end{pmatrix}$.

5.3 向量空间及齐次线性方程组的解空间

常常由相同特性的向量组成一个集合进行研究, 齐次线性方程组的解集就是具有相同特性的列向量.

5.3.1 向量空间

定义 5.2

设实数集 $\mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}, n > 0$, 令

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 称为 n 维列向量, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 n 维行向量.

n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (\text{I})$$

的一个解 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 就是一个 n 维行向量, 用列向量 $\alpha = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ 表示, 它是对应的

矩阵方程 $Ax = b$ 的一个解.

设 $Ax = 0$ 为 (II), 则有如下性质:

1. 0 是 (II) 的解;
2. 如果 α, β 是 (II) 的解, 则 $\alpha + \beta$ 也是 (II) 的解;
3. 如果 α 是 (II) 的解, $k \in \mathbf{R}$, 则 $k\alpha$ 也是 (II) 的解.

设 W 是 (II) 的解集, 则 W 是非空的, 称 W 关于加法和数乘是封闭的.

定义 5.3

对于 $\mathbf{R}^n$ 的任何一个非空子集 V , 如果 V 关于加法和数乘是封闭的, 则称 V 为向量空间.

由此 $W, \mathbf{R}^n$ 均是向量空间, 称 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维向量空间.

5.3.2 齐次线性方程组的解空间

由上面知, 齐次线性方程组 $Ax = \mathbf{0}$ 的解集 W 是一个向量空间, 称 W 为齐次线性方程的解空间.

定理 5.1

设 η 是 $Ax = b$ 的特解, 则 $\eta + W = \{\eta + \alpha | \alpha \in W\}$ 是 $Ax = b$ 的解集, 其中 W 是 $Ax = \mathbf{0}$ 的解空间.

5.4 向量组的线性表示及线性相关与无关

同维向量的加法、减法及数乘, 统称为向量的线性运算. 同维向量的线性运算的结果仍为同维的向量. 由前一章知, 线性方程组(I)可以用系数矩阵 A 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 及常数向量 b 表示为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = b$ 的形式.

定义 5.4

如果存在实数 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$, 则称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 称 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的线性组合.

于是线性方程组是否有解可以表述为常数向量是否可以表示为以系数矩阵为列向量的线性组合.

5.4.1 向量组的线性表示**例 5.4**

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$, 证明 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 并求出表达式.

解:

(1) 输入如下4个向量并加以定义:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix},$$

(2) 输入如下等式:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta,$$

(3) 选择整个等式并单击计算:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

(4) 改写成如下的线性方程组并求解:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = -12 \end{cases}, \text{解是: } [x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{3}{2}].$$

故 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

►或求矩阵方程的解:

(1) 合并 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}, \text{合并: } \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & -12 \end{pmatrix}.$$

(2) 解矩阵方程:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

►展示计算过程:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2r_1+r_2, \\ -r_1+r_3, \\ -3r_1+r_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & -1 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 10 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-r_3+r_2, \\ -r_3+r_4}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 13 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{3r_4+r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 36 & -54 \\ 0 & 3 & 13 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-18r_2+r_3, \\ \frac{1}{2}r_2}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 13 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{-13r_2+r_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}r_4, \\ -4r_4+r_1}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_4 \leftrightarrow r_3, \\ r_3 \leftrightarrow r_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

5.4.2 向量组的线性相关

定义 5.5

如果存在 m 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ 成立, 则称向量组 $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

由此, 判定 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是否线性相关, 只要判定齐次线性方程组 $x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = 0$ 是否有非零解.

定理 5.2

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关的充要条件是齐次线性方程组 $x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = 0$ 有非零解.

例 5.5

判别向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是线性相关还是无关.

解:

(1) 输入如下4个向量:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(2) 合并 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{合并: } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ -3 & 6 & -5 & -1 \\ -2 & -9 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3) 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ -3 & 6 & -5 & -1 \\ -2 & -9 & 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} \frac{153}{37}\hat{t}_4 \\ -\frac{54}{37}\hat{t}_4 \\ -\frac{164}{37}\hat{t}_4 \\ \hat{t}_4 \end{pmatrix}.$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

►展示计算过程:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ -3 & 6 & -5 & -1 \\ -2 & -9 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -3r_2 + r_1, \\ 3r_2 + r_3, \\ 2r_2 + r_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 29 & -10 & -2 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & -24 & 7 & -4 \\ 0 & -29 & 10 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_4}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 0 & 29 & -10 & -2 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & -24 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 & -6 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & -24 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5r_1 + r_3} \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 & -6 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -8 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5r_3 + r_2} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 37 & 164 \\ 0 & 1 & -8 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & -34 \\ 0 & 0 & 37 & 164 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

有非零解, 线性相关.

5.4.3 向量组的线性无关

不线性相关的向量组称为线性无关.

定理 5.3

如果 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$ 必有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

由此, 判定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是否线性无关, 只要判定齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ 是否只有零解.

定理 5.4

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ 只有零解.

例 5.6

判别向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性相关还是无关.

解:

$$\text{由 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{得 } \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 8 & 13 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{故 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关.}$$

► 展示计算过程:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 8 & 13 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2r_1+r_2, \\ -3r_1+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5r_2+r_3} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{5r_3+r_1, \\ -3r_3+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}r_2, \\ -3r_2+r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

只有零解, 线性无关.

5.5 向量组的秩

矩阵 $A_{m \times n}$ 的每一列构成列向量, 这 n 个列向量形成向量组; 反之, 每个(列)向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可形成一个矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 矩阵的秩可移植到向量组上.

5.5.1 向量组间的关系

定义 5.6

如果向量组(I)的每个向量是向量组(II)的向量, 则称向量组(I)是向量组(II)的部分组.

有如下结论:

定理 5.5

1. 若向量组(I)线性相关, 则向量组(II)线性相关. 即部分组线性相关必有原来的向量组线性相关;
2. 若向量组(II)线性无关, 则向量组(I)线性无关. 即向量组线性无关, 则其任何一个部分组也线性无关.

定义 5.7

如果向量组(I)的每个向量均可由向量组(II)线性表示, 则称向量组(I)可由向量组(II)线性表示. 如果向量组(I)可由向量组(II)线性表示, 向量组(II)也可由向量组(I)线性表示, 则称向量组(I)与向量组(II)相互等价.

有如下结论:

定理 5.6

1. 若向量组(I)是向量组(II)的部分组, 则向量组(I)可由向量组(II)线性表示;
2. 若向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 向量组(II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性相关, 则向量 β 可由向量组(I)线性表示, 并且表示法惟一.

5.7

已知向量组

$$(I) \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(II) \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

问向量组 (I)、(II) 是否等价?

解: 一方面, 由于 $\beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1$, $\beta_3 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3$, 另一方面, $\alpha_1 = \beta_2$, $\alpha_2 = -\beta_1 + \beta_3$, $\alpha_3 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3$, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 及 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以相互表示, 故两个向量组等价.

可将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 及 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 合并成矩阵, 再化为行最简阶梯形矩阵, 即可求出相互表示的表达式:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.5.2 极大线性无关组与向量组的秩

从单个的向量开始: 零向量线性相关, 从而含零向量的向量组必定线性相关. 非零向量线性无关, 增加若干向量形成的向量组可能线性无关, 也可能线性相关了.

定义 5.8

设向量组(I): $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ ($r \in \mathbf{N}, r \geq 1$) 是向量组(II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的部分组, 如果

(1) 向量组(I)线性无关;

(2) 对于任意的 j ($j = 1, 2, \dots, n$), $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$ 线性相关.

则称向量组(I)是向量组(II)的一个极大线性无关组.

由于向量组是否线性相关与齐次线性方程组相关, 而该方程组的系数矩阵即为向量组组成的矩阵. 一般地, 有

定理 5.7

1. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 则以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 为列向量的矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 的秩为 m , 反之亦然.
2. 若向量组(I): $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ ($r \in \mathbf{N}, r \geq 1$) 是向量组(II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的极大线性无关组, 则矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 的秩为 r .

从而可定义向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的秩, 由向量组的秩判定是否线性相关.

定义 5.9

设以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 的秩为 r , 则称 r 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的秩, 记为 $\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 或 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

例 5.8

设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, 求该向量组的秩.

解: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, 合并: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, 行最简阶梯形: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 秩: 3.

一般地, 有:

定理 5.8

1. 若向量组(I)可由向量组(II)线性表示, 则 $\text{rank}(\text{I}) \leq \text{rank}(\text{II})$;
2. 等价的向量组秩相同;
3. 若 $\text{rank}(\text{I}) = \text{rank}(\text{II}) = \text{rank}(\text{I}, \text{II})$, 则向量组(I)与向量组(II)等价;
4. 设 A 是 n 阶方阵, 则下列结论等价:
 - (1) A 可逆;
 - (2) $\text{rank}(A) = n$;
 - (3) A 的列向量组线性无关;
 - (4) A 的列向量组的秩为 n .
5. 设由 n 维向量组成的向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 在向量组(I)的每个向量的相同位置添加 r 个分量得到 $n+r$ 维向量组(II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$, 若向量组(I)线性无关, 则向量组(II)也线性无关.

由此, 可以对列向量组组成的矩阵进行行变换, 转化为行最简阶梯形矩阵求出极大线性无关组, 剩余的向量用极大线性无关组来线性表示. 判定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是否线性无关或无关, 只要判定由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 组成的矩阵 A 的秩 $\text{rank}(A)$ 与 n 的大小关系.

例 5.9

问 λ 为何值时, 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ 线性相关?

解: 由 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & -7 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_1+r_3]{-4r_1+r_2, 2r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & -3 & \lambda+8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & \lambda+8 \end{pmatrix} \xrightarrow{3r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda+17 \end{pmatrix}$, $\lambda = -17$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 < 3$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

例 5.10

求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ 的秩, 并求出向量组的一个极大线性无关组, 同时将其余向量表示成这个极大线性无关组的线性组合.

解:

(1) 输入如下4个向量:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 合并 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{合并: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) 求矩阵的秩及行最简梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \text{秩: } 2, \text{故极大线性无关组包含2个向量.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) 写出极大线性无关组及剩余向量用极大线性无关组线性表示:

极大线性无关组为 α_1, α_2 , 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$.

►展示计算过程:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2r_1+r_2, \\ -3r_1+r_3, \\ r_1+r_4, \\ -2r_1+r_5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{4}r_3, \\ -5r_3+r_2, \\ 7r_3+r_5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2r_3+r_1, \\ r_2 \leftrightarrow r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故极大线性无关组为 α_1, α_2 , 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$.

5.6 向量空间的基、维数与坐标

与 $m \times n$ 矩阵 A 相关的有四种空间: 行向量空间、列向量空间、左零向量空间及右零向量空间. 本章节仅研究列向量空间, 即由列向量组成的矩阵, 其极大线性无关组的向量生成.

定义 5.10

设 V 是一个向量空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的线性无关的向量组, 如果对于 V 的任何一个向量 α 均可用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 V 的基, 基向量的个数 n 称为 V 的维数, 记为 $\dim(V)$.

$$\text{由于 } \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 是 } \mathbf{R}^n \text{ 的 } n \text{ 个线性无关的向量, 且对于 } \mathbf{R}^n \text{ 中}$$

任意的向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, 均有 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n$, 则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基, 且

$\dim(V) = n$, 即 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维向量空间.

5.6.1 求列向量空间的基

1. 插入点定位于矩阵.
2. 选择运算 + 矩阵 + 列基.

例 5.11

计算矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ 的列基.

解: ► 矩阵 + 列基

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \text{列基: } \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right].$$

5.6.2 基向量、过渡矩阵及坐标

n 维向量空间可以有不同的基, 两组基组成的向量组是相互等价的. 如果 $\mathbf{R}^n$ 的一组基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 用 $\mathbf{R}^n$ 的另一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示:

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{n1}\alpha_n, \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{n2}\alpha_n, \\ \quad \quad \quad \dots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n, \end{cases} \quad (\text{I})$$

则称(I)为基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的线性变换.

令 $A^T = (a_{ij})_{n \times n}$, 则有

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A,$$

称 A 为基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的过渡矩阵.

设 α 为 n 维向量, α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 在 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标为 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, 则有

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

从而有

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

或

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} A^{-1},$$

称之为坐标变换公式.

于是有过渡矩阵:

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^{-1} (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n). \quad (\text{II})$$

例 5.12

$$\text{设 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都是 $\mathbf{R}^3$ 的基;
- (2) 求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵;
- (3) 已知向量 ξ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $(1, 2, 0)$, 求在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

解:

- (1) 判断向量组是基 (只要判断线性无关: 齐次线性方程是否只有零解或求秩)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

►或求向量组的秩:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{秩: } 3, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{秩: } 3.$$

►展示计算过程:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_3+r_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_1]{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

只有零解（秩均为3），故均线性无关. 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 及 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 均是 $\mathbb{R}^3$ 的基.

(2) 求出过渡矩阵 X

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{解是: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

►或计算:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

►展示计算过程:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{r_2+r_3, -r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_3+r_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) 求出坐标

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5.7 线性方程组的解的结构

当线性方程组有无穷多个解时，能否用公式表示其解（通解）成为解线性方程组的终极目标. 任何一个线性方程组 $Ax = b$ 均可导出相应的齐次线性方程组 $Ax = 0$.

定义 5.11

齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 的解空间的基称为该齐次线性方程组的基础解系.

定理 5.9

齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 的解空间的维数为 $n - \text{rank}(A)$.

如果齐次线性方程组 $Ax=0$ 有无穷多个解 (非零解), 则可用其基础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 表示出来 ($\text{rank}(A) = r$), 这些基础解系是向量空间的一个基. 只要再求出线性方程组 $Ax=b$ 的一个特解 η , 就可写出其通解 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta$ ($c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ 是任意实数).

例 5.13

求线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$$
 的导出组的一个基础解系, 并求出线性方程组的通解.

解:

(1) 输入如下线性方程:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$$

(2) 将线性方程组转化为矩阵:

$$\begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{pmatrix}, \text{ 对应矩阵: } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

(3) 求增广矩阵的行最简阶梯矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \text{ 行最简阶梯: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) 写出导出方程的基础解系及原线性方程组的通解:

$$\text{导出组的基础解系为 } \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{13}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 令 } x_5 = 0,$$

$$\text{则原线性方程组的特解为 } \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 通解为 } x = c\xi + \eta, (c \in \mathbf{R}).$$

► 展示计算过程:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -2r_1 + r_2, \\ -r_1 + r_3, \\ -3r_1 + r_4 \end{array}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & -6 & -6 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 2 & -5 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{-r_2+r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{-2r_3+r_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{3r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3+r_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -13 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}r_4} \\
& \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-r_4+r_1, \\ r_4+r_2, \\ -r_4+r_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & 0 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow{\substack{-r_3+r_1, \\ r_3+r_2}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{2r_2+r_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & 0 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

$$\text{线性方程组的解} \begin{cases} x_1 = 2x_5 + 0 \\ x_2 = 4x_5 + 1 \\ x_3 = \frac{8}{3}x_5 + 2 \\ x_4 = \frac{13}{3}x_5 + 0 \\ x_5 = x_5 + 0 \end{cases}, \text{即 } x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{13}{3} \\ 1 \end{pmatrix} x_5 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{从而导出组的基础解系为 } \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{8}{3} \\ \frac{13}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{原线性方程组的特解为}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{通解为 } x = c\xi + \eta, (c \in \mathbf{R}).$$

例 5.14

讨论方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t \end{cases}$$
 中的 p, t 为何值时, 方程组无解; 有解. 有解时用导出组的基础解系表示出通解.

解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t \end{cases}, \text{解是:}$$

$$\begin{cases} \{[x_1 = -x_4 - 1, x_2 = -2x_4 + 1, x_3 = 0]\} & \text{if } p \neq -8 \wedge t = -2 \\ \emptyset & \text{if } t \neq -2 \\ \{[x_1 = 4x_3 - x_4 - 1, x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1]\} & \text{if } p = -8 \wedge t = -2 \\ \emptyset & \text{if } t \neq -2 \wedge p = -8 \end{cases}.$$

►展示计算过程:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2r_1+r_2, \\ -3r_1+r_3 \\ -r_1+r_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2+r_3 \\ 2r_2+r_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{-r_2+r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$t \neq -2$ 时, 原线性方程组无解; $t = -2$ 时, 原线性方程组有解. 有解时,

$$(1) \ p = -8 \text{ 时, 导出组的基础解系为 } \xi_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{令 } x_3 = x_4 = 0, \text{ 则原线性方程组的特解为 } \eta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 从而, 通解为}$$

$$x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \eta, \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

$$(2) \ p \neq -8 \text{ 时, } x_3 = 0, \text{ 导出组的基础解系为 } \xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{令 } x_3 = 0, \text{ 则原线性方程组的特解为 } \eta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 通解为 } x = c\xi + \eta, \quad (c \in \mathbf{R}).$$

5.8 本章概括

1. 向量的概念及运算:

- 行向量、列向量; 加法、数乘向量.
2. 基本概念: 向量空间 (V)、 n 维向量空间 ($\mathbf{R}^n$)、解空间;
- 子空间 ($L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$)、生成元组 ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$);
 设 η 是 $Ax = b$ 的特解, 则 $\eta + W = \{\eta + \alpha | \alpha \in W\}$
 是 $Ax = b$ 的解集, 其中 W 是 $Ax = \mathbf{0}$ 的解空间.
3. 向量的线性表示及向量组的线性相关与无关:
- 向量组等价:
 向量组(I)与(II)等价 $\iff \text{rank(I)} = \text{rank(II)} = \text{rank(I, II)}$;
 - 线性表示: $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n \rightarrow$ 求线性方程组的解 (克莱姆法则, 矩阵初等变换);
 - 线性相关、线性无关的定义;
 - 线性相关、线性无关的充要条件:
 - (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\iff x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \mathbf{0}$ 只有零解;
 - (2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\iff x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \mathbf{0}$ 有非零解;
- ▶ 判断向量组是否线性相关 $\rightarrow$ 线性方程组的解 $\rightarrow$ 矩阵行变换成阶梯形矩阵 $\rightarrow$ 解的情形.
4. 极大线性无关组;
- 线性无关的充要条件:
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关 $\iff \text{rank}(A) = m$, 其中 $A = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$;
 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的极大线性无关组 $\iff \text{rank}(A) = r$, 其中 $A = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$;
 - 相关联系: A 可逆 $\iff |A| \neq 0 \iff \text{rank}(A) = n \iff A$ 的行 (列) 向量组线性无关;
- ▶ 判断向量组是否线性相关 $\rightarrow$ 线性方程组的解 $\rightarrow$ 系数行列式行变换 $\rightarrow$ 是否为零.
5. 求极大线性无关组: 系数矩阵行变换化为阶梯形矩阵 $\rightarrow$ 写出极大线性无关组.
6. 向量空间的维数 **【dim(V)】**;
- α 的坐标 $(a_1, a_2, \dots, a_r)$: $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_r\alpha_r$, 基向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$;
 - 基变换公式、过渡矩阵: $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n) = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)A$;
 - 坐标变换公式:

$$\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix};$$

7. 解的结构: 导出组、基础解系;
- 解空间维数: $A_{m \times n}X = \mathbf{0}$ 的解空间的维数为 $n - \text{rank}(A)$.
- ▶ 求基础解系及通解的方法: 增广矩阵行变换成阶梯形矩阵 $\rightarrow$ 导出组的基础解系、原线性方程组的特解 $\rightarrow$ 原线性方程组的通解.

5.9 从做中学

练习 5.1

一、选择题

1. 集合 $V = \{x = (0, x_2, x_3, \dots, x_n)^T \mid x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$ 是一个向量空间. ()
A. 错误 B. 正确
2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为三个已知的 n 维向量, 集合 $V = \{x \mid x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{R}\}$ 是一个向量空间. ()
A. 错误 B. 正确

二、填空题

3. 已知 $\alpha = (3, 5, 7, 9)^T, \beta = (-1, 5, 2, 0)^T$, x 满足 $2\alpha + 3x = \beta$, 则 $x =$ _____.
4. 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, 则 $x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 =$ _____.

三、解答题

5. 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$

求向量 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$.

6. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$

问 β 是否可以表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

7. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix},$

问 β 是否可以表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

8. 试将 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 表示成 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$

$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的线性组合.

练习 5.2

一、填空题

1. 已知向量组 $\alpha_1 = (-1, 2, -1), \alpha_2 = (3, 6, 3)$, 则 α_1, α_2 线性 _____.

2. (1) 单独一个零向量是_____. (2) 任何一个非零向量是_____.

3. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -x \\ -2x \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},$

若此向量组的秩为2, 则 $x =$ _____.

二、解答题

4. 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix},$

试问: 当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关? 当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关? 并将 α_3 表示成 α_1, α_2 的线性组合.

5. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3$ 线性无关.

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_2 = 3\alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$. 试判断向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性相关还是线性无关.

7. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$

(1) 求该向量组的秩;

(2) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组;

(3) 将其余向量用该极大线性无关组表示.

8. 已知向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 具有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的一个极大线性无关组.

练习 5.3

一、选择题

1. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集 $S = \{x | Ax = 0\}$ 是一个向量空间. ()

A. 错误 B. 正确

2. 向量组 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ 必线性无关. ()

A. 错误 B. 正确

二、填空题

3. 两个成比例的向量是_____. 含有零向量的向量组必_____.

4. 若一个向量组的部分组线性相关, 则该向量组必 _____.
 若一个向量组线性无关, 则该向量组的任何部分组必 _____.

三、解答题

5. 问 λ 为何值时, 向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ 线性相关.
6. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明: $\beta_1 = 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = 5\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3$ 线性无关.
7. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- (1) 求该向量组的秩;
 (2) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组;
 (3) 将其余向量用该极大线性无关组表示.
8. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ t \\ 11 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix},$
- $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, 问: (1) 当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? (2) 当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关? (3) 当 t 为何值时, α_3 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性表示.

6 — 行列式与矩阵的对角化

学习目标与要求

1. 理解行列式的概念及性质，会求低阶行列式的值.
2. 了解相似矩阵的概念，理解矩阵可对角化的条件.
3. 理解矩阵的特征值及特征向量的概念，会求矩阵的特征值及特征向量.
4. 理解向量内积及正交矩阵的概念.
5. 会用正交变换将实对称矩阵化为对角矩阵.

解齐次线性方程组就是通过初等行变换将系数矩阵化为行最简阶梯形矩阵. 如果有自由未知量, 进行初等列变换, 则系数矩阵最后初等变换为左上角为单位矩阵的分块矩阵 $E_{m \times n}^{(r)}$, 当行与列相等时即为对角矩阵. 因此, 如何将一个矩阵化为对角矩阵也是值得研究的, 而行列式是其基本的工具.

6.1 行列式

$n \times n$ 矩阵 (a_{ij}) 的行列式是一个数, 通常定义为

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

这里 σ 表示 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的全排列, 且 $(-1)^{\text{sgn}(\sigma)} = \pm 1$, 取决于 σ 是偶排列或奇排列.

注意行列式仅仅对于方阵才有意义.

为了便于学习, 可通过归纳形式定义行列式:

定义 6.1

设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的行列式 $|A|$ 是一个数. 当 $n = 1$ 时, 规定 $|A| = a_{11}$; 当 $n > 1$ 时, 规定

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_n \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_n \\ a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

上述两个定义是等价的. 这样有:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \cdots.$$

这样, 对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

分别消去未知量 x_2, x_1 得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (b_1a_{22} - a_{12}b_2), \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}b_2 - b_1a_{21}). \end{cases}$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则得到二元线性方程组的惟一解:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases}$$

6.1.1 计算方阵的行列式

1. 插入点定位于矩阵.
 2. 选择运算 + 矩阵 + 行列式.
- 或
- 用行列式专用符号表示行列式, 选择计算.

例 6.1

计算矩阵的行列式: (1) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{bmatrix}$.

解: ► 矩阵 + 行列式

$$(1) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{行列式: } ad - bc.$$

$$(2) \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \text{行列式: } a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{3,1}a_{2,3} + a_{2,1}a_{1,3}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}.$$

$$(3) \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{bmatrix}, \text{行列式: } -121529.$$

可以对单竖线表示的行列式或函数 `det` 作用的矩阵, 选择计算, 计算行列式的值.

$$\begin{vmatrix} -35 & 50 \\ 79 & 49 \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad \det \begin{bmatrix} -35 & 50 \\ 79 & 49 \end{bmatrix}.$$

可从矩阵特性对话框中选择内置的单竖线作为矩阵的括号形成行列式, 或者单击  选择单竖线, 或按 `shift + ctrl + backslash` 使用双竖线作为行列式的定界符.

在数学状态下输入 `det`, 当输入到 `t` 时自动转换为 `det`. 也可单击 , 在对话框中选择此函数.

例 6.2

利用 `det` 函数计算矩阵的行列式: (1) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{bmatrix}$.

解: ► 计算

$$(1) \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc;$$

$$(2) \det \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 49 \end{bmatrix} = -121529;$$

6.1.2 使用MuPAD自定义DetX函数展示按递归定义计算行列式

1. 选择运算 + 解方程 + 定义MuPAD函数.
2. 对话框中设置如下:
 - MuPAD 函数名: DetX(x)
 - Scientific WorkPlace 名称: X(x)
 - MuPAD 函数是一个过程:
 - 检验MuPAD 内部格式文件 (.mu 文件).
 - 单击浏览选择所需的DetX.mu文件.
3. 选择确定.

此过程定义了函数 $X(x)$,其中 n 阶矩阵为 x ,计算以第1列元素展开的 $n-1$ 阶行列式.

例 6.3

利用行列式定义计算矩阵的行列式:
$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 & -5 \\ 4 & -8 & -3 & 92 \\ -3 & -6 & 7 & 6 \\ 5 & -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

解: 如上定义函数 $X(x)$. 给定矩阵变量名为 z ,始终按第1列逐阶展开行列式.

► 定义 + 新定义

$$z = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 7 & -5 \\ 4 & -8 & -3 & 92 \\ -3 & -6 & 7 & 6 \\ 5 & -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

► 计算

$$\begin{aligned} X(z) &= 9X \left(\begin{bmatrix} -8 & -3 & 92 \\ -6 & 7 & 6 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) - 3X \left(\begin{bmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -8 & -3 & 92 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) - 4X \left(\begin{bmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -6 & 7 & 6 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) - \\ & 5X \left(\begin{bmatrix} 6 & 7 & -5 \\ -8 & -3 & 92 \\ -6 & 7 & 6 \end{bmatrix} \right) = 36X \left(\begin{bmatrix} -3 & 92 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) - 96X \left(\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) - 20X \left(\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \right) - \\ & 48X \left(\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) + 45X \left(\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 92 \end{bmatrix} \right) - 75X \left(\begin{bmatrix} -3 & 92 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \right) = 275X(-5) - 1116X(-1) + \\ & 85X(6) + 840X(92) = 77531. \end{aligned}$$

注意: MuPAD自定义函数DetX(x),在Scientific WorkPlace中的函数名称只能取字母 X ,方可逐阶展开,展示行列式的降阶计算的过程.

6.1.3 行列式的性质

矩阵是一个二维表格,而行列式是一个数.对矩阵作初等变换,移植到行列式上,可得到如下:

定理 6.1

1. 如果方阵 A 是上(下)三角的矩阵, 则 $\det A$ 等于矩阵 A 主对角线元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

从而, 单位矩阵的行列式为1.

2. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

例 6.4

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$, 试验证: $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

解: 由 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$, 得 $AB = \begin{pmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 6 & 24 & 60 \\ 6 & 26 & 72 \end{pmatrix}$,

$$\det(AB) = \det \begin{pmatrix} 6 & 34 & 102 \\ 6 & 24 & 60 \\ 6 & 26 & 72 \end{pmatrix} = -216, (\det A)(\det B) = -18 \times 12 = -216,$$

故 $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

定理 6.2

3. 倍乘变换: 行列式的一行公因数可以提到外面来, 或一个数乘行列式等于这个数乘行列式的任意一行.

$$\text{即 } \det(E(i(k))A) = (\det E(i(k))) (\det A) = k(\det A).$$

从而, 行列式的一行为零, 则行列式为零.

4. 对换变换: 交换两行, 行列式变号.

$$\text{即 } \det(E(i, j)A) = (\det E(i, j)) (\det A) = -(\det A).$$

从而, 行列式有两行相同, 则行列式为零.

5. 倍加变换: 一行的倍数加到另一行去, 行列式不变.

$$\text{即 } \det(E(i, j(k))A) = (\det E(i, j(k))) (\det A) = \det A.$$

例 6.5

利用行列式性质计算行列式的值:

$$\begin{aligned}
 (1) & \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix}; (2) \begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}; (3) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}; \\
 (4) & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

解:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 15;$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \\
 & = 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -36;
 \end{aligned}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 (4) & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\
 & = 2(1) \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 30.
 \end{aligned}$$

定理 6.3

6. 若行列式的某一行的元素都是两数之和, 则一行的和可以拆开化为两个行列式之和. 即

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_1 & a_{i2} + b_2 & \cdots & a_{in} + b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i+2} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i1} + b_1 & a_{i2} + b_2 & \cdots & a_{in} + b_n \\ 1 & b_1 & b_2 & & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i+2} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 1 & b_1 & b_2 & & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i+2} (-1)^{i+1} (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} (-1)^{i+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

7. $\det A = \det A^T$.

8. 方阵 A 可逆当且仅当 $|A| \neq 0$.

9. 方阵 A 可逆, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

例 6.6

已知 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$, 求: (1) $|C^T|$; (2) $|C^{-1}|$.

解: (1) $|C^T| = |C| = 12$; (2) $|C^{-1}| = |C|^{-1} = \frac{1}{12}$.

行列式 D 的递归定义实际上是按它的第1列进行展开. 当然可研究行列式按任意一列(行)展开.

定义 6.2

n 阶行列式的 (i, j) 处的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 是指在 D 中划去所在的第 i 行和第 j 列, 其它元素不动所得到的 $n-1$ 阶行列式, 称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式, 记为 A_{ij} .

6.1.4 使用MuPAD自定义DetEAC函数按列查看元素与对应的代数余子式乘积之和

1. 选择运算 + 解方程 + 定义MuPAD函数.

2. 对话框中设置如下:

- **MuPAD 函数名:** DetEAC(x, j)
- **Scientific WorkPlace 名称:** $E(x, j)$
- **MuPAD 函数是一个过程:**
 - 检验MuPAD 内部格式文件 (.mu 文件).
 - 单击浏览选择所需的DetEAC.mu文件.

3. 选择确定.

此过程定义了函数 $E(x)$, 其中矩阵为 x , 按第 j 列展开行列式.

例 6.7

利用行列式按第2列展开计算矩阵的行列式: $\begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 79 \end{bmatrix}$.

解: 如上定义函数 $E(x)$. 给定矩阵变量名为 y , 按第2列展开行列式.

► 定义 + 新定义

$$y = \begin{bmatrix} -85 & -55 & -37 \\ -35 & 97 & 50 \\ 79 & 56 & 79 \end{bmatrix}.$$

► 计算

$$E(y, 2) = 55 \det \left(\begin{bmatrix} -35 & 50 \\ 79 & 79 \end{bmatrix} \right) - 56 \det \left(\begin{bmatrix} -85 & -37 \\ -35 & 50 \end{bmatrix} \right) + 97 \det \left(\begin{bmatrix} -85 & -37 \\ 79 & 79 \end{bmatrix} \right).$$

计算可知 $E(y, 2) = |y|$. 一般地, 有

定理 6.4

$$\text{设 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 则 } D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

6.1.5 几类特殊行列式的计算

行列式与矩阵类似，还有特殊的三角形行列式、准三角形行列式，范德蒙德行列式。

1. 三角形行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

2. 准三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sk} & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}.$$

3. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

例 6.8

计算行列式： $D_n = \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}.$

解: 将第一行乘 (-1) 分别加到其余各行, 得

$$D_n = \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & \cdots & x-a \end{bmatrix}$$

再将各列都加到第一列上, 得

$$D_n = \begin{bmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{bmatrix} = (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$

当然也可将各列都加到第一列, 再将第一行乘以 (-1) 分别加到其余各行得到结果, 升阶法或递推法也是一种解题的方法.

6.1.6 利用Cramer法则解线性方程组

瑞士数学家Cramer在1750年的《线性代数分析导论》中提出了解线性方程组的行列式解法, 现今称Cramer法则.

定理 6.5

设 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \quad \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (\text{I})$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则线性方程组(I)存在惟一解 $(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \dots, \frac{D_n}{D})$, 其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = 1, 2, \dots, n.$$

例 6.9

利用Cramer法则解线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 19, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

解：将上述方程的括号改成配对，再

► 重写 + 方程作为矩阵形式（未知量列表： x_1, x_2, x_3, x_4 ）

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 19 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \end{pmatrix}, \text{ 对应矩阵: } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 7 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & -5 & 3 & 19 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

► 输入矩阵

单击  或 ，在上述结果矩阵中选择并复制线性方程组的系数矩阵到单元格中，

得到 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ，同法得到线性方程组的常数向量 $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 19 \\ 4 \end{pmatrix}$ 。

► 定义 + 新定义

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 19 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

► 可以如同分块矩阵中定义MuPAD函数substitute，替换矩阵A中的列SWP中的函数 $I(x, y, i, j)$ ，其中矩阵b替换矩阵x的第i行第j列开始的矩阵。

► 定义 + 新定义

$$D = \det(A);$$

$$d_1 = \det(I(A, b, 1, 1));$$

$$d_2 = \det(I(A, b, 1, 2));$$

$$d_3 = \det(I(A, b, 1, 3));$$

$$d_4 = \det(I(A, b, 1, 4)).$$

► 计算

$$x_1 = \frac{d_1}{D} = 1;$$

$$x_2 = \frac{d_2}{D} = 1;$$

$$x_3 = \frac{d_3}{D} = -1;$$

$$x_4 = \frac{d_4}{D} = 2.$$

注意：SWP中不能直接计算 $|I(A, b, 1, 1)|$ 。

6.2 矩阵的对角化问题

n 阶方阵 A 经过若干次初等的行变换、列变换可以化成标准形矩阵 $E_{n \times n}^{(r)}$, 即矩阵 A 等价于矩阵 $E_{n \times n}^{(r)}$.

一般地, 两个矩阵 A, B 等价当且仅当存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $B = PAQ$. 特别地,

定义 6.3

设 A, B 均是 n 阶方阵, 如果存在可逆矩阵 P 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称矩阵 A 与 B 是相似的.

问题: 对于 n 阶方阵 A , 是否存在一个对角矩阵 B , 使得 A 与 B 相似? 如果存在, 则称矩阵 A 可对角化.

可以证明:

定理 6.6

n 阶方阵 A 可对角化的充要条件是: 存在 n 个线性无关的 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 使得对于每个 α_i , 都有 λ_i , 满足 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$.

例如 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 对于向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 存在实数 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$, 满足 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i (i = 1, 2, 3)$. 此时令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{rank}: 3$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的向量, 即存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

由于 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)\alpha_i = 0$ 有非零解 α_i , 从而 $|\lambda_i E - A| = 0$. 于是可以从中解出 λ_i , 再求解对应的齐次线性方程组的基础解系.

6.3 特征多项式

定义 6.4

方阵 A 的特征多项式 $f(x)$ 是矩阵 $x E - A$ 的行列式.

► 计算方阵的特征多项式

- 插入点定位于矩阵, 选择运算 + 矩阵 + 特征多项式.

例 6.10

计算 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征多项式.

解: ► 矩阵 + 特征多项式

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征多项式: } X^3 - 12X^2 + 48X - 64.$$

► 计算

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X-4 & -1 & 0 \\ 0 & X-4 & 0 \\ 0 & 0 & X-4 \end{pmatrix}.$$

► 计算, 分解

$$\det \begin{pmatrix} X-4 & -1 & 0 \\ 0 & X-4 & 0 \\ 0 & 0 & X-4 \end{pmatrix} = X^3 - 12X^2 + 48X - 64 = (X-4)^3;$$

$$\begin{vmatrix} X-4 & -1 & 0 \\ 0 & X-4 & 0 \\ 0 & 0 & X-4 \end{vmatrix} = X^3 - 12X^2 + 48X - 64 = (X-4)^3.$$

6.4 特征值及特征向量

给定矩阵A, 子菜单**矩阵 + 特征向量及矩阵 + 特征值**, 是求解满足 $Av = cv$ 的常数 c 及非零列向量 v . 如果矩阵中的元素是浮点实数, 则解也是实数, 否则是精确的符号解或本来就没有解. 当求解时没有给出解, 则可转换到浮点实数求出数值解.

定义 6.5

常数 c 及 v 称为满足特征多项式的特征值及特征向量.

6.4.1 计算方阵的特征值

- 插入点定位于矩阵, 选择**运算 + 矩阵 + 特征值**.

例 6.11

计算矩阵的特征值: (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1.0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

解: ► **矩阵 + 特征值**

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征值: } \frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{5}{2}, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1.0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征值: } 5.3723, -0.37228.$$

当你选择**矩阵 + 特征向量**, 得到对应特征值的特征向量. 与特征值匹配的特征向量可能的多个. 有时会返回符号解. 当系统没有找到符号解时, 可改变为浮点实数以获得数值解.

6.4.2 计算方阵的特征向量及特征值

- 插入点定位于矩阵, 选择运算 + 矩阵 + 特征向量.

例 6.12

计算矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征向量.

解: ► 矩阵 + 特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征向量: } \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{33} - \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{33} - \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{33} + \frac{5}{2}$$

检验求出的特征值及特征向量是否满足 $Av = cv$, 以下说明之.

► 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{33} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{33} \\ \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33} \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{33} \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{33} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{33} \\ \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33} \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{33} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例 6.13

计算矩阵 $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ 的特征向量.

解: ► 矩阵 + 特征向量

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}, \text{特征向量: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 2.$$

在上例中, 特征值1 是单根, 2 是重根.

► 计算

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

例 6.14

计算矩阵 $\begin{pmatrix} 49 & -69 & 99 \\ 23 & -81 & 20 \\ 48 & 1.0 & -87 \end{pmatrix}$ 的特征向量.

解: ► 矩阵 + 特征向量

$$\begin{pmatrix} 49 & -69 & 99 \\ 23 & -81 & 20 \\ 48 & 1.0 & -87 \end{pmatrix}, \text{特征向量: } \left\{ \begin{pmatrix} 0.93733 \\ 0.18622 \\ 0.29451 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 66.398, \left\{ \begin{pmatrix} 0.1599 \\ 0.88794 \\ 0.43127 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -67.144, \left\{ \begin{pmatrix} 0.54043 \\ 0.11389 \\ -0.83364 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -118.25$$

对于特征多项式及特征根, 有如下的几个结论:

定理 6.7

1. 如果矩阵 A 可逆, λ_0 是 A 的一个特征根, 则 $\lambda_0 \neq 0$, 且 λ_0^{-1} 是 A^{-1} 的一个特征根.
2. 如果 A 的特征值 λ 对应的一个特征向量为 α , $\varphi(x)$ 是 n 阶多项式, 则有 $\varphi(A)\alpha = \varphi(\lambda)\alpha$.
3. 相似的矩阵具有相同的特征多项式, 从而有相同有特征根.
4. 属于不同特征值的特征向量线性无关.

于是, 如果 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征根, 则 A 可对角化.

例 6.15

已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A^n ($n \in \mathbb{N}$).

解: ► 矩阵 + 特征向量

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}, \text{特征向量: } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 6.$$

$$\text{令 } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{从而 } A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}, A^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$\text{即 } A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}6^n & -\frac{1}{6}6^n \\ -\frac{3}{2}6^n & \frac{1}{2}6^n \end{pmatrix}.$$

6.5 向量的内积与正交矩阵

矩阵分块后可形成行向量或列向量，矩阵的乘法实质上基于向量的内积。

6.5.1 向量的内积

为了计算向量的内积，可选择自定义工具栏中的点积（内积）符号，或单击二元运算符工具栏中 $\pm\div$ ，再选择点积符号。

定义 6.6

向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 与 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 的内积为

$$\alpha \cdot \beta = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

当 $\alpha \cdot \beta = 0$ 时，称向量 α 与 β 正交。向量组的任一个向量与其他的任一向量正交，称向量组为正交的向量组。

► 计算向量的内积

1. 输入向量内积运算的表达式。
2. 选择计算。

例 6.16

计算向量的内积：(1) $(1, 2, 3) \cdot (3, 2, 1)$ ；(2) $[3x, -1, 5] \cdot [1, 1, 1]$ 。

解：► 计算

$$(1) (1, 2, 3) \cdot (3, 2, 1) = 10;$$

$$(2) [3x, -1, 5] \cdot [1, 1, 1] = 3x + 4.$$

变量缺省时假定的是复数状态，你可以利用函数 `assume` 设置成实数。

► 计算

$$\text{assume}(\text{real}) = \mathbb{R}.$$

$$(u, v, w) \cdot (x, y, z) = ux + vy + wz.$$

内积具有如下性质：

1. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;
2. $(k\alpha) \cdot \beta = k(\alpha \cdot \beta)$;
3. $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$;
4. $\alpha \cdot \alpha \geq 0$.

可以证明：

定理 6.8

非零向量组成的正交向量组是线性无关的。

6.5.2 向量的长度

定义 6.7

称 $\sqrt{\alpha \cdot \alpha}$ 为向量的长度, 记为 $\|\alpha\|$. 长度为1的向量称为单位向量.

向量的长度有如下性质:

1. $\|\alpha\| = 0 \iff \alpha = 0$;
2. $\|k\alpha\| = |k| \|\alpha\| \quad (k \in \mathbf{R})$.

若 α 是非零向量, 则 $\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 是一个单位向量. 此时称 $\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 对 α 标准化.
在SWP中, 可直接用双竖线括号 $\|\|$ 来求向量 α 的长度.

例 6.17

计算 $\alpha = (1, 2, 3)$ 的长度.

解: ▶ 定义

$$\alpha = (1, 2, 3)$$

▶ 定义 + 新定义

$$\|\alpha\| = \sqrt{14}.$$

6.5.3 正交矩阵

定义 6.8

矩阵 A 如果满足 $A^T A = E$, 则称矩阵 A 为正交矩阵.

由定义可知: 正交矩阵 A 是可逆矩阵, 且 $A^{-1} = A^T$.

定理 6.9

正交矩阵是实矩阵, 其任何两个不同列的向量的内积为0, 自身的内积为1.

▶ 测试矩阵的正交性

1. 插入点定位于矩阵.
2. 选择运算 + 矩阵 + 正交测试.

例 6.18

测试矩阵的正交性: (1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

解: ▶ 矩阵 + 正交测试

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{正交? } True;$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{正交? } False.$$

6.6 实对称矩阵的对角化

并不是所有的方阵都可以对角化. 可以证明:

定理 6.10

设A是实对称矩阵, 则A的属于不同特征值的特征向量是正交的.

由此可得到:

定理 6.11

如果A是实对称矩阵, 则必存在正交矩阵P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵.

6.6.1 线性无关的向量组标准正交化

齐次线性方程组的基础解系是线性无关的向量组. 线性无关的向量组可通过Schmidt正交化, 再标准化, 成为正交的单位向量组.

Schmidt正交化过程:

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性无关的向量组, 令

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1,$$

...

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_n, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})} \beta_{n-1},$$

则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是正交向量组.

如果再令

$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1, \varepsilon_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2, \dots, \varepsilon_n = \frac{1}{\|\beta_n\|} \beta_n$, 则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是单位向量组成的正交向量组, 称它为标准正交向量组.

例 6.19

将 $\mathbf{R}^3$ 的 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 基化为标准正交基.

解:

(1) 输入如下线性无关的向量组并定义:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 输入如下正交变换并定义:

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1, \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2.$$

(3) 输入如下标准化并计算:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \frac{1}{\|\beta_3\|} \beta_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

6.6.2 使用MuPAD函数orthog将线性无关的向量组正交化

1. 选择运算 + 解方程 + 定义MuPAD函数.

2. 对话框中设置如下:

- **MuPAD** 函数名: linalg::orthog(x)
- **Scientific WorkPlace** 名称: $O(x)$
- **MuPAD** 函数名中输入的是MuPAD过程名称, 再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.

3. 选择确定.

此过程定义了函数 $O(x)$, 正交化向量组 x .

例 6.20

将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 列向量正交化.

解: 如上定义函数 $O(x)$.

► 定义 + 新定义

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

► 计算

$$O([\text{col}(A, 1), \text{col}(A, 2), \text{col}(A, 3)]) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} \\ \frac{4}{15} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \right].$$

6.6.3 使用MuPAD函数normalize将向量标准化

1. 选择运算 + 解方程 + 定义MuPAD函数.

2. 对话框中设置如下:

- **MuPAD** 函数名: linalg::normalize(x)
- **Scientific WorkPlace** 名称: $N(x)$
- **MuPAD** 函数名中输入的是MuPAD过程名称, 再检验**MuPAD**内置函数或自动装载.

3. 选择确定.

此过程定义了函数 $N(x)$, 标准化向量组 x .

例 6.21

将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 列向量标准正交化.

解: 如上定义函数 $N(x)$. 标准化向量 B 的3个分量:

► 定义 + 新定义

$$B = O([\text{col}(A, 1), \text{col}(A, 2), \text{col}(A, 3)])$$

► 计算

$$(N(B_1), N(B_2), N(B_3)) = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{30}\sqrt{2}\sqrt{15} \\ \frac{1}{15}\sqrt{2}\sqrt{15} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{15} \end{pmatrix} \right) \text{ 或简单}$$

计算:

$$\left(\frac{1}{\|B_1\|}B_1, \frac{1}{\|B_2\|}B_2, \frac{1}{\|B_3\|}B_3 \right) = \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{30}\sqrt{2}\sqrt{15} \\ \frac{1}{15}\sqrt{2}\sqrt{15} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{15} \end{pmatrix} \right).$$

6.6.4 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵转化为对角矩阵的方法或步骤:

1. 求出特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 的所有根, 即矩阵 A 的所有特征值. 设所有不同特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.
2. 对每个特征值 λ_i , 解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0$, 求出一个基础解系, 设为 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{il_i}$.
3. 不同基础解系的向量是相互正交的. 对每个基础解系进行Schmidt正交化和单位化得到正交的单位向量组, 它仍是一个基础解系, 记这个正交的单位向量组为 $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{il_i}$.
4. 由于 A 可以对角化, 故有 $l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$. 令矩阵 P 是由下列向量组为列向量的矩阵:
 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{1l_1}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{2l_2}, \dots, \varepsilon_{r1}, \varepsilon_{r2}, \dots, \varepsilon_{rl_r}$.

例 6.22

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 成为对角矩阵.

解:

(1) 求矩阵的特征值及特征向量:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 特征向量: } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0,$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 9.$$

►或求矩阵的特征方程及特征根:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征多项式: } X^3 - 9X^2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \text{特征值: } 9, 0.$$

►展示计算过程:

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right| = \lambda^3 - 9\lambda^2 = 0, \text{解是: } 9, 0.$$

$$0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{基础解系 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{基础解系 } \alpha_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 输入如下正交变换及并定义:

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 输入如下标准化并计算:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{15}\sqrt{5} \\ -\frac{4}{15}\sqrt{5} \\ \frac{1}{3}\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|} \alpha_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(4) 写出正交矩阵并对角化:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{故 } P \text{ 是正交矩阵.}$$

►展示计算过程:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[2r_1+r_3, -r_1]{2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4r_3+r_1]{-r_3+r_2} \begin{pmatrix} 0 & 18 & -18 \\ 0 & 9 & -9 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_2+r_1, \frac{1}{9}r_2} \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{\frac{1}{2}r_3, 2r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

6.7 本章概括

- 行列式的定义;
- 行列式的性质:
 - 数乘: kr_i ; 一行为零;
 - 相加【一行和拆开】: $D(a+b) \rightarrow D(a)+D(b)$;
 - 交换两行【变号】: $r_i \longleftrightarrow r_j$; 两行相同、两行成比例;
 - 数乘一行加到另一行: kr_i+r_j ;
 - 行列互换【转置不变】.
- 余子式、代数余子式 $[M_{ij}, A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}]$;
 - 行列式展开、行列式计算, $|AB|=|A||B|$;
- 线性方程组公式解【克拉默法则或克莱姆法则】.

♠ 相关数学史

行列式的概念最初是伴随着方程组的求解而发展起来的. 行列式的提出可以追溯到十七世纪, 最初的雏形由日本数学家关孝和与德国数学家戈特弗里德·威廉·莱布尼茨各自独立得出, 时间大致相同.

戈特弗里德·威廉·莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646年7月1日—1716年11月14日), 德国哲学家、数学家, 历史上少见的通才, 被誉为十七世纪的亚里士多德. 他本人是一名律师, 经常往返于各大城镇, 他许多的公式都是在颠簸的马车上完成的, 他也自称具有男爵的贵族身份.

莱布尼茨在数学史和哲学史上都占有重要地位. 在数学上, 他和牛顿先后独立发明了微积分, 而且他所使用的微积分的数学符号被更广泛的使用, 莱布尼茨所发明的符号被普遍认为更综合, 适用范围更加广泛. 莱布尼茨还对二进制的发展做出了贡献.



莱布尼茨



范德蒙德

范德蒙德 (Vandermonde, Alexandre Theophile, 1735~1796) 法国数学家.

克莱姆 (Cramer, Gabriel, 瑞士数学家 1704-1752) 1704年7月31日生于日内瓦, 早年在日内瓦读书, 1724年起在日内瓦加尔文学院任教, 1734年成为几何学教授, 1750年任哲学教授. 他自1727年进行为期两年的旅行访学. 在巴塞尔与约翰·伯努利、欧拉等人学习交流, 结为挚友. 后又到英国、荷兰、法国等地拜见许多数学名家, 回国后在与他们的长期通信中, 加强了数学家之间的联系, 为数学宝库也留下大量有价值的文献. 他一生未婚, 专心治学, 平易近人且德高望重, 先后当选为伦敦皇家学会、柏林研究院和法国、意大利等学会的成员.

克莱姆法则, 又译克拉默法则 (Cramer's Rule) 是线性代数中一个关于求解线性方程组的定理. 它适用于变量和方程数目相等的线性方程组, 是瑞士数学家克莱姆 (1704-1752) 于1750年, 在他的《线性代数分析导言》中发表的. 其实莱布尼兹 (1693), 以及马克劳林 (1748) 亦知道这个法则, 但他们的记法不如克莱姆.

5. 矩阵的相似 **【 $B = P^{-1}AP$ 】**;

- 方阵 A 可对角化 $\iff$ 存在 n 维线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 满足 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$);

6. 特征值、特征向量;

- 求法: $|\lambda E - A| = 0$ 的根; $\lambda E - A \rightarrow$ 行变换成阶梯形矩阵求基础解系 $\rightarrow$ 写出特征向量;
- 性质:
 A 可逆, 则 $|\lambda_0 E - A| = 0 \iff \lambda_0 \neq 0, |\lambda_0^{-1} E - A^{-1}| = 0$.

7. 基本概念: 内积、正交、正交向量组;

- 性质: 非零正交向量组 $\implies$ 线性无关;
- Schmidt 正交化过程: 单位向量、标准正交向量组、标准正交基;

8. 正交矩阵 **【 $P^T P = E$ 】**;

实对称矩阵化成对角型矩阵的方法:

- (1) 求 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 的根 λ_i ;
- (2) 求 $(\lambda_i E - A)X = 0$ 的基础解系;
- (3) 进行 Schmidt 正交化及单位化;
- (4) 写出矩阵的列向量矩阵 P , 由 $P^T A P = P^{-1} A P$ 得到对角型矩阵.

♠ 相关数学史

Erhard Schmidt (1876.1.13-1959.12.6) 德国数学家, 师从大卫·希尔伯特, 1905年获哥廷根大学博士学位. 在泛函分析方面做出了很多贡献. 实际上, Gram-Schmidt 正交化早已在 Laplace 与 Cauchy 的文章中出现过, 这个命名是命名者不熟悉历史文献所致, 当然 Schmidt 文章中的正交化已经超越了 Cauchy 当时的情况.



瑞士数学家
克莱姆



Erhard
Schmidt

6.8 从做中学

练习 6.1

一、填空题

$$1. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$2. \text{若 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 6, \text{ 则行列式 } \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 0 \\ a_{21} & 2a_{22} & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$4. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、解答题

$$5. \text{计算下列行列式: } \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 138 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$6. \text{计算下列行列式: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$7. \text{计算下列行列式: } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 9 & 6 \\ 1 & 10 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

8. 用行列式的性质证明下列等式:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

练习 6.2

一、填空题

$$1. \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

$$1. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 已知 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = p$, 则 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 已知 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ g & h & i \end{vmatrix} = q$, 则 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ l+d & m+e & n+f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、解答题

5. 计算下列行列式: $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}.$

6. 计算下列行列式: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$

7. 计算下列行列式: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$

8. 利用拉姆法则解下列线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

练习 6.3

一、填空题

1. 已知向量 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征向量, 则参数 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 A 为 n 阶矩阵且 $Ax = 0$ 有非零解, 则 A 必有特征值 $\underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设 A 是 3 阶方阵且 $A - E, A - 2E, 2A + E$ 都不可逆, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & a \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, A 的特征值分别为 6, 2, 2, 且 A 有三个线性无关的特征向量, 则参数 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、解答题

5. 二求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

6. 已知 $A = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, 判断 A 是否可以 diagonal 化. 若能 diagonal 化, 则求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.
7. 设 3 阶矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$, 对应的特征向量依次为 $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 求 A .
8. 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量, 且满足 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$, 求:
- (1) 矩阵 A 的特征值;
 - (2) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

练习 6.4

一、填空题

1. 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 若 α, β 正交, 则 a, b 所满足的关系为_____.
2. 与 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 都正交的单位向量是_____.
3. 设 $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ a & b & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
4. 若 A 是正交矩阵, 则行列式 $|A^3 A^T| =$ _____.

二、解答题

5. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是线性无关的向量组, 求与此向量组等价的正交向量组.
6. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ (其中 Λ 是对角矩阵)
7. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

求：(1) A 的特征值与特征向量；(2) $A^{-1} + A^{-1}|A|$ 的特征值与特征向量.

8. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & a \\ -2 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似.

求：(1) a, b 的值；(2) A 的所有特征值和特征向量；(3) 可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;
(4) 正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

7 — 实二次型及其化简方法

学习目标与要求

1. 理解实二次型及正交变换的概念.
2. 会用正交变换的方法及配方法化简二次型.
3. 理解矩阵正定的概念, 会判定矩阵的正定性.

中学解析几何中的圆锥曲线, 其方程可以表示为 $f(x, y) = 0$, 其中 $f(x, y)$ 是一个二元二次多项式. 反过来, 对于二元二次多项式 $f(x, y)$, 如果 $f(x, y) = 0$, 是否表示为圆锥曲线呢? 如 $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$, 经过线性变换:

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

可以化为标准形式: $mx'^2 + ny'^2 = 1$. 这涉及到二次型的问题.

二次型在数学的许多领域中出现, 有深刻的应用背景. 由于二次型是一个多项式, 与对称矩阵密切联系, 它也是线性代数的研究对象.

7.1 正交变换的方法化简二次型

由前面知识可知, 对于实对称矩阵 A , 经过正交变换 $X = PY$ 后可将 $X^T A X$ 化为标准型 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值.

定义 7.1

设 A, B 是方阵, 如果存在可逆矩阵 P , 使得 $B = P^T A P$, 则称 A 与 B 合同.

由此, 上面的正交变换 $X = PY$, 有 $P^{-1} = P^T$, 对角形矩阵 $B = P^T A P$ 与 A 具有合同关系: $Y^T (P^T A P) Y = Y^T B Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

定义 7.2

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 且 A 是一个对称矩阵, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则称多项式

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n) + (a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n) + \cdots + a_{nn}x_n^2 = (a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n) + (a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n) + \cdots + (a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2) = X^TAX$ 为 n 元二次型. A 称为二次型的系数矩阵.

定义 7.3

称 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 为二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的标准形.

例 7.1

用正交变换化 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$ 为标准形并求出所用的正交变换.

解:

- (1) 写出实二次型对应的系数矩阵:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3 = 2x_1^2 + 2 \times (-2)x_1x_2 + 0x_1x_3 + x_2^2 + 2 \times (-2)x_2x_3 + 0x_3^2, \text{ 故 } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (2) 求出特征值及对应的特征向量:

► 矩阵 + 特征向量

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 特征向量: } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -2, \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow$$

4.

► 展示计算过程:

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right| = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0, \text{ 解是: } -2, 1, 4.$$

$$-2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ 行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

基础解系 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{基础解系 } \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{基础解系 } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 正交及标准化:

由于属于不同的特征向量是正交的, 故只要标准化.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|\alpha_1\|} \alpha_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \frac{1}{\|\alpha_2\|} \alpha_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|} \alpha_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(4) 写出正交矩阵及正交变换:

$$\text{令 } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{正交变换为 } x = Py. \text{标准形为 } f(x_1, x_2, x_3) = -2y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2.$$

► 展示计算过程:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 4),$$

$$\lambda = -2, \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_3 + r_1, \\ -\frac{1}{4}r_1, \frac{1}{2}r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2r_1 + r_2, \\ 3r_3 + r_2, \\ r_2 \leftrightarrow r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 1, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_1, \\ \frac{1}{2}r_2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_1 + r_2, \\ -r_2 + r_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 + r_1, \\ \frac{1}{2}r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 4, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}r_1, \frac{1}{2}r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_3 + r_1, \\ -2r_1 + r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-3r_3 + r_2, \\ r_2 \leftrightarrow r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.2 配方法化简二次型

对于一个二次型, 如果只要求用非退化的线性变换, 而不一定用正交变换来化简成为标准型, 则用配方法更具操作性.

在二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中区分 a_{11} 是否为零, 分别进行变量变换:

- 当 $a_{11} \neq 0$, 则 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2 + f_1(x_2, \dots, x_n)$;
- 当 $a_{11} = 0, a_{12} \neq 0$, 令
$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \\ \dots \\ x_n = y_n, \end{cases} \text{ 则 } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2a_{12}x_1x_2 + \dots = 2a_{12}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + \dots = 2a_{12}y_1^2 + \dots.$$

例 7.2

用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2$ 为标准形并求出所用的线性变换.

解:

$$(1) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4)^2 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$$

注意: 上述最后的等式, 一开始先输入 $(x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4)^2 + [x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 - (x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4)^2]$, 再选择最后的方括号, 按下ctrl键同时选择运算 + 化简, 则得到化简结果.

$$(2) f_1(x_2, x_3, x_4) = x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 = 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2,$$

$$\text{令} \begin{cases} x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_2 - y_3, \quad f_1(x_2, x_3, x_4) = 3y_2^2 - 2y_2y_3 + 2y_2y_4 - y_3^2 - 2y_3y_4 + y_4^2 \\ x_4 = y_4, \end{cases}$$

注意: 上述最后的等式, 一开始先定义 $f_1(x_2, x_3, x_4) = x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$, 再分别定义 $x_2 = y_2 + y_3, x_3 = y_2 - y_3, x_4 = y_4$, 再输入 $f_1(x_2, x_3, x_4)$ 后按下ctrl键同时选择运算 + 化简, 则得到化简结果.

$$(3) \text{以下操作类同: } f_2(y_2, y_3, y_4) = 3(y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4)^2 + -\frac{4}{3}y_3^2 - \frac{4}{3}y_3y_4 + \frac{2}{3}y_4^2,$$

$$f_3(y_3, y_4) = -\frac{4}{3}y_3^2 - \frac{4}{3}y_3y_4 + \frac{2}{3}y_4^2 = -\frac{3}{4}(y_3 + y_4)^2 + 2y_4^2,$$

$$\text{故 } f_2(y_2, y_3, y_4) = 3(y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4)^2 - \frac{3}{4}(y_3 + y_4)^2 + 2y_4^2.$$

$$(4) \text{由此 } f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)^2 + 3(y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4)^2 - \frac{3}{4}(y_3 + y_4)^2 + 2y_4^2$$

$$\text{令} \begin{cases} z_1 = y_1 = x_1 + x_2, \\ z_2 = y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4, \\ z_3 = y_3 + y_4, \\ z_4 = y_4, \end{cases} \text{ 则标准形 } f(x_1, x_2, x_3, x_4) = z_1^2 + 3z_2^2 - \frac{3}{4}z_3^2 + 2z_4^2.$$

$$\text{所用的线性变换: } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X,$$

$$\text{故线性变换: } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z.$$

7.3 正定二次型

由上节知, 对于实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 必有非退化的线性变换 $X = CY$, 使得 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$. 由于交换两个变元的变换也是非退化的线性变换, 故可设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2$, 其中 $\lambda_1 > 0, \cdots, \lambda_p > 0, \lambda_{p+1} < 0, \cdots, \lambda_r < 0$. (*)

定义 7.4

对于(*)式, 作线性变换:

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{\lambda_1} y_1, \\ \cdots \\ z_p = \sqrt{\lambda_p} y_p, \\ z_{p+1} = -\sqrt{-\lambda_{p+1}} y_{p+1}, \\ \cdots \\ z_r = -\sqrt{-\lambda_r} y_r, \end{cases}$$

则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = z_1^2 + \cdots + z_p^2 + z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$ 为二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的规范形.

例如, 例7.2的二次型的规范形是 $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - w_4^2$, 可用非退化线性变换矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{5}{6}\sqrt{2} & -\frac{8}{9}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{5}{6}\sqrt{2} & \frac{8}{9}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{2} & -\frac{4}{9}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ 得到.}$$
定义 7.5

设有二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 如果对于任意一组不全为零的数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 都有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0$, 则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个正定二次型.

定理 7.1

n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定二次型的当且仅当 $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$ 是它的规范型, 当且仅当它的系数矩阵的顺序主子式都大于零.

在SWP中可通过它的系数矩阵来判别它是否是正定的.

例 7.3

判别下列二次型的正定性:

(1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2^2 + 4x_3^2$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 6x_3^2$.

解: (1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 插入点定位于矩阵处, 选

择运算 + 矩阵 + 正定测试:

► 矩阵 + 正定测试

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ 是正定的.}$$

或由于 A 的顺序主子式 $5 > 0$, $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26 > 0$, $\begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80 > 0$, 故 $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 是正定的.

$$(2) f(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ 的系数矩阵为 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \text{ 插入点定位于矩阵处, 选择运算 +}$$

矩阵 + 正定测试:

► 矩阵 + 正定测试

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ 不是正定;}$$

$$\text{或由于 } A \text{ 的主子式 } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 < 0, \text{ 故 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ 不是正定的.}$$

7.4 本章概括

1. n 元二次型:

- 系数矩阵、正交变换 $X = CY$ 、标准型;
- 矩阵的合同 $\mathbf{[B = P^T A P]}$;

2. 二次型化成标准型的方法:

- $P^T A P = P^{-1} A P \rightarrow$ 对角矩阵, 求正交矩阵 P ;
- 配方法: 区分二次项系数是否为零时的变换方式, 求线性变换.

3. 正定二次型:

- 正定二次型的定义;
- 正定二次型的判定.

7.5 从做中学

练习 7.1

一、填空题

1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_4 + 6x_3x_4$ 的矩阵是_____.
2. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 对应的二次型是_____.
3. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + ax_2 + ax_3)^2$ 的对应矩阵是_____.
4. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $x = Py$ 可化为标准形 $f = 6y_1^2$, 则 $a =$ _____.

二、解答题

5. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 + 8x_3^2$ 为标准形, 并写出变换矩阵.
6. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形, 并写出变换矩阵.
7. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3$ (其中 $a > 0$) 通过正交变换化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 试求参数 a 及所用的正交变换矩阵.
8. 已知二次方程 $x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2bx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 4$ 可以经过正交变换 $x = Py$ 化为方程 $y_2^2 + 4y_3^2 = 4$, 求 a, b 的值和正交矩阵 P .

练习 7.2

一、填空题

1. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定的, 则 λ 满足的条件是_____.
2. 若对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则 k 满足的条件是_____.
3. 当 $a =$ _____ 时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2.
4. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2$ 的秩为_____, 正惯性指数为_____, 负惯性指数为_____.

二、解答题

5. 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ 的正定性.
6. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + (1-k)x_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3$, 其中 k 为参数, 求使 f 为正定二次型的 k 的取值范围.
7. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形, 并写出变换矩阵.
8. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
 - (1) 将 f 表示为矩阵形式;
 - (2) 用正交变换 $x = Py$ 化二次型 f 为标准形, 并写出所用正交变换矩阵及二次型的标准形;
 - (3) 将 f 的对应矩阵 A 表示成 $A = WW^T$.



8 — 附录—科学工作平台SWP

学习目标与要求

1. 会利用键盘及工具栏输入并操作函数及数学表达式.
2. 结合学习的线性方程组、矩阵、向量等，能按实例进行相关的数学运算.
3. 会定义函数，绘制函数的二维及三维图形.

8.1 引言

*Scientific WorkPlace*为MuPAD V3.1.1 这一数学系统提供了一个计算操作的界面. 这个界面只使用通常的数学符号以及自由模式进行编辑. 在对自由模式的需求中要求出现所有有意义的问题. MuPAD、Maple 和 Mathematica 都含有能使用自然表达式的笔记本系统, 这些表达式只允许使用者对给定的表达式作细微的变化. 我们想使尽可能多的各不相同的形式被系统默认, 而不是要求使用者遵守死板的句法或者仅能书写一种表达式. 比如说, $\int \frac{dx}{x}$ 和 $\int \frac{1}{x} dx$ 都被作为基本的形式而接受.

从*Scientific WorkPlace*的主窗口你可以直接:

- 执行具体运算;
- 应用数学运算;
- 单独地或者适当地获得数学结果;
- 输入和运算矩阵;
- 定义函数名称以及对函数进行运算;
- 充分应用MuPAD 自定义函数功能;
- 绘制图象.

这一工具包含了大学以及研究生水平的数学, 它既是学习数学的教育工具, 也是检验猜想、阐述假设的研究工具. 同时, 作为课堂教学工具它具有巨大的潜力. 目前正在进行实验. 自由模式的科学文本的改进与计算工具包的结合使得它替代黑板成为一种可能.

8.2 安装

通常，从Scientific WorkPlace 网站上下载swp-pro550.exe，安装并用注册码418-E0600-19837-31870-76830注册，以便试用30天。程序缺省安装计算机代数系统MuPAD，用于数值计算、符号运算及图形处理。

你也可下载Scientific WorkPlace 便携式软件，按如下进行安装：

1. 解压swp55.exe到磁盘根目录X:下，子目录为X:\swp55（X应该换成您释放swp55对应的盘符）。
2. 关闭杀毒软件，右键单击X:\swp55\0ini\0SWP55ini.bat,选择“以管理员身份运行”，注册SWP55并安装相关字体文件。
3. 双击X:\swp55\0ini\1RunSWP55.bat，启动SWP，或将X:\swp55\swp-pro.exe发送到计算机桌面，建立快捷键，方便操作。
4. 可在SWP55中使用MuPAD 3.1.1或Maple 5.1计算机代数系统，进行数值计算、符号运算及图形处理。

8.3 入门

这个系统可以通过一系列实例来认识它的功能。这些实例范围很广，从简单的算术到深奥的线性代数。它们包括所有的计算，涉及各种分支学科，产生诸多奇妙的结果。为了使得内部的运算不发生混乱，本文件被写了保护。你可以用别的名称保存它然后用新的文件来操作。在任何情况下，我们建议你打印出一份，这样你就可以很快的找到实例和加了内容标签的各种计算表达式。

在开始实例之前，先检查运算（Compute）是否出现在Scientific WorkPlace窗口的菜单栏上；如果没有，那么说明你的安装是不完全的。

数的分解 把光标放在1234567890内，然后从运算（Compute）菜单中选择分解（Factor）。

在=的后面快速地记下答案，它的结果 $2 \times 3^{25} \times 3607 \times 3803$ ，在需要的地方会有 $\times$ 号。

在 3^2 后面5前面的 $\times$ 号是不需要的，Scientific WorkPlace会自动地选择整数因子。

多项式的分解 把光标放在 $7x^5 + 7x^3 - 41x^4y - 41x^2y + 80x^3y^2 + 80xy^2 - 52y^3x^2 - 52y^3$ 内，然后从运算（Compute）菜单中选择分解（Factor）。Scientific WorkPlace会自动地选择多项式因子。

8.3.1 放置插入点

Scientific WorkPlace内的数学表达式会用红色的字体显示。当把光标放在数学表达式内时，在常用工具栏内的  /  图标会显示红色的 。我们说的把光标放在数学表达式内，指的是显示  的任何地方都是有效的，表达式内部的任何位置或者是直接放在表达式后面，而直接放在表达式前面是无效的。

展开 把光标放在 $(x - 2y)^2(7x - 13y)(x^2 + 1)$ 内然后从运算（Compute）菜单内选择展开（Expand）。你就会得到前面要求因式分解的多项式。

8.3.2 如何在Scientific WorkPlace中选择表达式

当你把光标放在一个数学表达式内并从运算（Compute）菜单中选择一项操作时，Scientific WorkPlace会自动地根据你选择的操作选择表达式的整体，或包含光标的有联系的文本及数学部分进行处理。这里有些实例可以表明各种属性。

方程 把光标放在方程 $2x+3x=1$ 内，然后从运算（Compute）菜单中选择解方程（Solve）子菜单中的精确解（Exact）。在这种情况下，*Scientific WorkPlace*选择的是整个方程，所求的解满足方程。现在把光标放在方程的左边，并从运算（Compute）菜单中选择计算（Evaluate）。如此，*Scientific WorkPlace*只选择方程的左边进行计算。同时注意到，计算结果和原来的表达式是相等的，该结果紧跟着原来的表达式，并用等号连接。此时，光标位于计算结果的后面，便于你对结果选择其他操作而无需移动光标。

8.3.3 为运算选择表达式

如果你仅仅想对表达式的特殊部分计算，或者想使*Scientific WorkPlace*的自动选择无效，你可以使用单个选择。接下来的有些实例表明了这一特征，以下两种方法均可。

对选择进行操作 使用鼠标或者SHIFT+箭头来选择 $(x+y)^5(7x-13y^3)+\sin^2x$ 中的 $(x+y)^5$ ，从运算（Compute）菜单内选择展开（Expand），*Scientific WorkPlace*会在原来的整个表达式后面加上一个冒号，并在冒号后面给出你操作的答案。一般情况下，*Scientific WorkPlace*认为你的操作结果和原来的这个表达式是不相等的，所以它把操作结果用冒号和原来的表达式分开。

替代一个选择 如果你对表达式的部分进行操作得到一个结果，那么*Scientific WorkPlace*允许你用这个结果代替原来的表达式。比如你想用 $(x-2y)^2$ 展开式代替 $(x-2y)^2(7x-13y)(x^2+1)$ 内的 $(x-2y)^2$ ，可以先选择表达式内的 $(x-2y)^2$ ，然后按住CTRL键，同时在运算（Compute）菜单内选择展开（Expand），这一操作的效果是 $(x-2y)^2$ 被 $x^2-4xy+4y^2$ 代替，它没有括号，但是它俨然仍然是被选中状态，你只需要单击来添加所需要的括号。现在把操作后的表达式转化为原来的形式，先选中 $(x^2-4xy+4y^2)$ ，按住CTRL键，再在运算（Compute）菜单内选择分解（Factor）。下面是些这方面的例子。

1. 选择 $\frac{2x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)}$ 的分母，按住CTRL键，在运算（Compute）菜单内选择展开（Expand）。然后再运用恰当的操作把操作结果复原。
2. 从 $\sqrt{\frac{2x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)}}$ 中选择分子里的 $2x^2+2x$ ，按住CTRL键，从运算（Compute）菜单内选择分解（Factor）。
3. 分解 $\frac{5280}{123456 \times 7891011}$ 的分母中的7891011，并用分解结果代替7891011，最后用因数分解后的结果代替分子。

这种局部运算，也就是按住CTRL键的同时从运算（Compute）菜单内选择一定命令进行操作，是*Scientific WorkPlace*的一个重要特征。它可以方便地把表达式转化为我们想要的形式。甚至可以生硬的运用*Scientific WorkPlace*只在文本内进行操作。试试选中7，再从运算（Compute）菜单内选择计算（Evaluate）。

8.3.4 作为Evaluate的快捷键

按CTRL+E就是执行的与从运算（Compute）菜单内选择计算（Evaluate）一样的操作（也有些例外）。这比用鼠标从运算（Compute）菜单内选择计算（Evaluate）要简单些。

8.3.5 中断计算

多数的计算会或多或少地在瞬间完成，但是也有些需要几秒钟来进行。有些时候可方便地让运算（Compute）停止计算并回到*Scientific WorkPlace*中：在一个计算开始后，

通过CTRL+BREAK来完成。试试看对 $2^{191} + 3$ 进行分解，运算（Compute）实际上会在两秒钟内分解完，但是如果你愿意你可以随时停止计算。

8.3.6 菜单设置

数值计算的数据以及数值结果的显示都是被计算设置（Computation Setup）菜单的选择所决定的。从工具（Tools）菜单中选择（Computation Setup），选项卡的参数页显示了你可以选择的设置。现在来看看一般信息（General）选项卡上的我们关心的几个选项。它们只能对含有浮点的算术也就是含有小数的计算进行操作。这些设置不会影响计算和整数及有理数的显示。第一个选择，计算结果的数字显示（Digits Shown in Display）只是指显示在屏幕上的数字。这些设置不会影响计算的精确度。没有意义的一串零会被压缩，并且有意义的符号会在需要的地方被避免压缩。如果科学记数法（Threshold for Scientific Notation）被设置成一个正整数 n ，那么任何绝对值接近一个 $\geq 10^n$ 的十进制的数字都会被系统用科学记数法的符号表示出来。这个数是根据显示的数据数值来判定的。程序会保证科学记数法的边界不会超过显示数据的数值。比如说，如果设置数字显示（Digits Shown in Display）= 5，那么，任何边界大于5的科学符号设置与边界为5的科学符号设置的效果是一样的。

在下面的实例中，把数字显示（Digits Shown in Display）设置为5，科学记数法（Threshold for Scientific Notation）设置为4。计算下面的表达式，看看这些计算结果是否和你想的一样。

1. 1.2345
2. 1.23454
3. 1.23455
4. 12.3456
5. 1234.56
6. 12345.6
7. 12345.0×10^3
8. 999994×1.0
9. 999995×1.0
10. -999996.0
11. -999986.0
12. 999995.9×10^{-2}
13. $999994. \times 10^{-2}$
14. 999995.0×10^{-12}
15. 888895×1.0
16. 889995×1.0
17. 899995×1.0
18. 123×0.01
19. 123×0.0001
20. 123×0.00001
21. 123×0.000001
22. 12×0.00001
23. 12×0.000001

从工具（Tools）菜单中选择菜单项数学引擎设置（Engine Setup）知，选项卡一般信

息 (General) 中的微分方程级数解的阶 (Series Order for ODE), 用于指明你从微分方程中得到的解的阶数. 选项卡错误处理 (Error Handling) 设置决定了在计算时你得到的信息处理及显示方式:

水平	错误通报	水平	错误引擎命令通报
0	没有	0	没有
1	蜂鸣声	1	状态栏显示命令
2	状态栏显示信息	2	对话框显示命令
3	对话框显示信息		

8.4 对函数、表达式操作

8.4.1 反斜杠运算符 (/)

因为缺少需要的括号而终止的运算解释起来很有趣. 有一个特殊的键盘命令用于获得 *Scientific WorkPlace* 的关于表达式的解释, 那就是 **CTRL+SHIFT+?** (运行在中文 **WINDOWS** 下使用, 否则使用 **CTRL+?**), 也可从运算 (Compute) 菜单中选择排版 (Interpret). 对下面的表达式应用这个命令, 看看你是否猜对每个解答的内容. 当然, 可能加上括号以避免含糊不清的表达式有含义.

1. a/bc
 2. $a/b+c$
 3. $a/b(c+d)$
 4. $(a+b)/(c+d)$
- 注意对下面两个例子的处理有什么不同:
5. $\sin \pi/2$
 6. $\sin a/\cos b$
 7. $a/bc \sin \theta$
 8. $\sin \pi/(a+b)(c+d)$
 9. $a/bc \Delta \Phi$
 10. $2/3(4)$
 11. $2/(3)4$
 12. $\sin \pi/2(3)$
 13. $\sin \pi/(2)3$
 14. $\sin \pi/(2)(3)$
 15. $\sin \pi/(2 \times 3)$
 16. $\sin \pi \div 2$

8.4.2 标准的数学函数

在 *MuPAD* 中含有众多函数, 目标之一就是能通过 *Scientific WorkPlace* 方便地使用这些函数. 它们中的绝大多数都可以在 *Scientific WorkPlace* 中直接使用. 下面的例子是最常用最简单的函数的引用举例.

当 $\frac{\sin}{\cos}$ 被选中时, 在对话框中会列出大约 38 个函数. 把光标放到你希望使用函数的地方, 然后看着列表中的函数来选择需要的函数. 现在把光标下移到 **max** 后单击确定 (**OK**). 这时灰颜色的 **max** 出现在屏幕上. 把光标放在 $\max\{1, 2, 3, 4, 10, 5, 4, 3\}$ 中并从计算 (Compute)

菜单中选择计算 (Evaluate) 命令。现在对

$$\max(1, 2, 3.2, 4, \frac{70}{8}, 10, 5, 4, 3))$$

进行同样的操作。注意到 *Scientific WorkPlace* 的多功能性和宽松的规则：大括号的后面一半被省略了。同时还要看到，运算结果被显示在被运算的表达式的下面一行。

试着计算下面的一些表达式：

1. $\cos \frac{\pi}{2}$
2. $\cos(\pi/2)$
3. $\cos \pi/2$

对三角函数来说，自变量的括号是可有可无的。但是对大多数函数来说，通常要给自变量加上括号，*Scientific WorkPlace* 不管你加的是小括号、中括号、或是大括号都是有效的。实际上，对于大多数的一元函数，*Scientific WorkPlace* 不论你是否在变量上加了括号。一般地，不需要在自变量上加括号的那些函数是由于它们的通常用法会使它们自动停止运算。但是，*Scientific WorkPlace* 需要判断哪个是变量：加了括号的还是没加的。对以下的表达式 $\cos xy$, $\cos x \int y dy$, $\cos \cos \pi/2 \cos x$ 以及 $\int \cos x dx$ 从计算 (Compute) 菜单中选择计算 (Evaluate) 运行，注意观察它们的变化。

当然，通常情况下使用者在可能出现歧义的地方都会加上括号。但是关键点系统是正确地理解一般的数学表达式。比如说，在 $\int \cos x dx$ 中，系统会正确地判断 dx 不是 $\cos$ 的自变量，并知道它是什么。

如果你只想使用加括号的普通函数，你可以选择以下设置：在工具 (Tools) 菜单中选择计算设置 (Computation Setups)，再在一般信息 (General) 选项卡中选择三角型转为普通型 (Convert Trigtype to Ordinary)。

对下面的表达式分别执行计算 (Evaluate) 和数值计算 (Evaluate Numerically) 命令：

1. $\exp(2)$
2. $\exp 2$
3. $\arcsin 1$
4. $\sin^{-1} x$

你认为对以下例子执行数值计算 (Evaluate Numerically) 命令会得到什么？

5. $\sin^{-1} \frac{1}{2}$
6. $\sin^2 30^\circ$
7. $\ln e$

对以下例子执行计算 (Evaluate) 和数值计算 (Evaluate Numerically) 命令的结果是有差别的。

8. $\ln 10$
9. $\log e$
10. $\log 10$
11. $\log_{10} 10$
12. $4!$
13. $100!$

分解已计算的 $100!$ 的结果：把光标放在计算的结果中，从计算 (Compute) 菜单内选择分解 (Factor) 就可以了。

14. $\Gamma(5)$

15. $\Gamma 5$
16. $\Gamma(5.3)$
17. $\Gamma(100)$
18. $\Gamma[(101.0)]$
19. $\gcd(2, 4, 6, 8, 10) \gcd(x^2 + 2x + 1, x^2 - 1)$
20. $\gcd(123450, 67891050)$

最后两个例子反映了 *Scientific WorkPlace* 区别多项式和整数的能力。

下面将介绍一些其余的常用的函数工具。它们可以直接在 *Scientific WorkPlace* 中用键盘输入或从 *Scientific WorkPlace* 窗口中选择适当的函数名称。先用鼠标简单地单击，直到你学会键盘输入。现在对下面的例子试着使用运算 (Compute) 中的计算 (Evaluate)，数值计算 (Evaluate Numerically)，化简 (Simplify)，分解 (Factor) 以及展开 (Expand) 命令：

1. $\frac{6}{2}$
2. $6 \div 3$
3. $6/3$
4. $\frac{20}{3}$

这里要注意执行计算 (Evaluate) 和数值计算 (Evaluate Numerically) 的不同表现。

5. $20 \div 3$
6. $20/3$
7. $5(4)(3)$
8. $5 \times 4 \times 3$
9. $5 * 4 * 3$
10. $(5) * 4 \times 3$
11. $\sqrt{256}$
12. $\frac{6}{2} \sqrt{12345}$

注意不同的命令所得到的不同结果。

13. $\sum_{i=1}^5 i$
14. $\sum_{j=1}^n j^3$ ，分解所得的结果。

15. $|-40|$ ，这里的竖杠可以从键盘上输入，或者从  对话框中选取，这二者是等价的。

而  中的竖杠是不能用来表示绝对值的。

16. $\text{abs}(-40)$ ，你可以从  对话框中得到 abs 函数。

17. $\| -69.0 \|$ ，这里你也许会错误地输入。MuPAD 希望得到一个两边都有 $\| \|$ 的矩阵或向量。试着计算 $\|(3, 4)\|$ 。从  中选择的双竖杠并不是用于这一目的。

18. $\binom{5}{2}$
19. $\binom{100}{25}$

20. 试着对 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $256 = 256.0$ 及 $a = b$ 应用检验相等 (Check Equality) 命令。

8.4.3 其它的运算

这一部分介绍的是通过 *Scientific WorkPlace* 使用一些其余的便捷的运算。首先介绍的是

各种三角函数表达式的化简和展开：

1. $\sin^2 x + \cos^2 x$ ，从运算 (Compute) 菜单内选择化简 (Simplify) 命令，也可以选择合并 + 三角式 (Combine+Trig Functions) 命令。

2. $\tan(a+b)$

3. $\sin(2a+3a)$

对于上面的最后一题，除了展开 (Expand) 以外的大多数命令的结果都是 $\sin(5a)$ ，试着执行这些命令。现在选择展开 (Expand)，然后对结果执行选择合并 + 三角式 (Combine+Trig Functions) 命令。

4. $\sin(2a+3b)$ 展开，并对结果执行选择合并 + 三角式 (Combine+Trig Functions) 命令。如果展开的结果在一行上显示太长了点，Scientific WorkPlace 会自动分行，所以仍然可以对它进行计算。对下面的两个例子执行展开 (Expand)，并对它们的结果执行合并 + 三角式 (Combine+Trig Functions) 操作。

5. $\sinh(a+b)$

6. $\tanh(2a+b)$

对下面的例子作计算 (Evaluate) 和化简 (Simplify) 操作：

7. $(\sin a)/(\cos a)$

8. $(\sinh a)/(\cosh a)$ 含有幂、指数及对数的表达式，可以通过合并 (Combine) 菜单项下的幂 (Powers)，指数式 (Exponentials) 和对数式 (Logs) 命令来化简和展开。

下面是一些这类计算的例子：

9. $\exp a \exp b$ ，试用化简 (Simplify) 和合并 + 指数式 (Combine+Exponentials) 命令。

10. $\exp 2a \exp 3b$

11. $\exp(2a+3b)$

12. $e^a e^b$ 应用 Expand 命令，然后对其结果执行合并 + 指数式 (Combine+Exponentials) 命令。化简 (Simplify) 命令和合并 + 指数式 (Combine+Exponentials) 命令的效果是一样的。

13. $\exp(2a)$

14. $\ln 2a$ ，使用展开 (Expand) 命令，然后对其结果执行合并 + 对数式 (Combine+Logs) 命令。

对下面的例子作同样的操作。

15. $\ln(6ab^2)$

16. x^{a+2} ，使用展开 (Expand) 命令，然后使用合并 + 幂 (Combine+Powers) 命令。

对下面的例子作同样的操作，化简 (Simplify) 命令和合并 + 幂 (Combine+Powers) 命令的效果是一样的。

17. $a^{x+y} b^{x+z}$

18. $a^x b^x$ (MuPAD 不允许将它写成 $(ab)^x$ 形式)。

8.4.4 一些特殊的运算和命令

我们已经对表达式应用了各种 MuPAD 命令，比如：分解 (Factor) 多项式 $x^2 - y^2$ 。有些命令是用来对向量和矩阵进行简单的运算。这些命令包括：计算 (Evaluate)、数值计算 (Evaluate Numerically)、合并 (Combine)、化简 (Simplify)、分解 (Factor) 以及展开 (Expand)。对下面的矩阵使用这些命令：

1. $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$

2. $\begin{bmatrix} \ln e & \sqrt{16} & 3 \\ 6 & \sqrt[3]{8} & 4 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 6! & 22 & 3x+2x \\ \ln a + \ln b & x^3 - y^3 & \sin^2 x + \cos^2 x \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 22 & 44 \\ 81 & 65 \end{bmatrix} \bmod 3$

计算的结果可能太长而不能在屏幕上的一行显示出来，程序已设计用箭头来隔断。这样，太长的结果会自动被按需要分成若干行显示。（这样的隔断显示不能适用的表达式有以下几个：矩阵、向量、分数等。）对下面的例子执行计算（Evaluate）命令：

1. $\sum_{i=0}^{500} x^i$
2. 500!

SHIFT+ENTER，可以用来手工指定数学表达式分行。有时，表达式（如矩阵），对一行来说只是太大了，但是你可以用屏幕下面的滚动条来看整个结果。

8.4.5 常数

*Scientific WorkPlace*默认各种常量，包括 e 、 π 、和 i 。这里有些实例。

把光标放在 e 后面，并从运算（Compute）菜单中选择数值计算（Evaluate Numerically）运行。另外你可以先选择 e ，然后再执行上面的命令。现在，对 π 和 i^2 作同样的操作。对下面的例子使用计算（Evaluate）命令和数值计算（Evaluate Numerically）命令，并注意结果的异同。

1. e
2. π
3. i
4. $|1+i|$
5. $\text{abs}(1+i)$
6. e^x
7. $e i \pi i e$
8. $\sum_{n=1}^3 i^3$
9. $\sum_{i=1}^3 i^3$

仔细看最后一题，它表明 i 不总是指 $\sqrt{-1}$ ，并且说明*Scientific WorkPlace*必须判定 i 是否代表 $\sqrt{-1}$ 或者代表一个普通的变量。

8.4.6 多项式

这里我们来学习多项式的一般运算。用于多项式的特别的命令可以从运算（Compute）菜单中的菜单项多项式（Polynomials）得到，有以下几个：合并（Collect）、商（Divide）、部分分式（Partial Fractions）、根（Roots）、排序（Sort）以及伴随矩阵（Companion Matrix）。合并（Collect）用于以多项式的某一主元排序，商（Divide）用于求多项式的商 $f(x)/g(x)$ ，并把商用整系数的形式： $q(x)+r(x)/g(x)$ 给出，这里 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 。部分分式（Partial Fractions）也是菜单项微积分（Calculus）下的一个选项，它的典型应用就是求积分。根（Roots）用于求系数复杂的多项式的根，而Sort则是把多项式的变量按幂降次排列。伴随矩阵（Companion Matrix）只是给出多项式的伴随矩阵。

还有一些命令对多项式也是有用的，比如：化简（Simplify）、分解（Factor）、展开（Expand）等，就象通常用的加法和乘法一样。

1. 合并 (Collect), 以 x 为主元: $x^2 + 3x + 5 - 3x^3 + 5x^2 + 4x^3 + 13 + 2x^4$
2. 合并 (Collect), 以 t 为主元: $5t^2 + 2t - 16t^5 + t^3 - 2t^2 + 9 + at^2$
3. 合并 (Collect), 以 x 为主元: $5t^2 + 3xt^2 - 16t^5 + y^3 - 2xt^2 + 9$
4. 合并 (Collect), 以 t 为主元: $5t^2 + 3xt^2 - 16t^5 + y^3 - 2xt^2 + 9$
5. 计算 (Evaluate): $\gcd(5(x^2 - 1), 10x - 10)$
6. 展开 (Expand) 并因式分解 (Factor), 再展开 (Expand) 其结果: $5(x+1)^3(x-1)^2$
7. 分解 (Factor) 下面的表达式, 并展开 (Expand) 其结果: $5x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x + 5$
8. 合并同类项 (Combine+Powers), 并计算 (Evaluate) 及化简 (Simplify): $5x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x + 5 + 4x^6 - 3x^5 + x^2 - 6$
9. 求部分分式 (Partial Fractions): $\frac{2x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)}$
10. 求部分分式 (Partial Fractions): $\frac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2-x-1)^2}$
11. 化简 (Simplify): $\frac{x+2}{x+1} + \frac{3x}{x-1}$
12. 因式分解 (Factor): $\frac{x+2}{x+1} + \frac{3x}{x-1}$, 注意, 因式分解 (Factor) 和化简 (Simplify) 对这个式子来说是一样的.
13. 展开 (Expand): $\frac{x+2}{x+1} + \frac{3x}{x-1}$
14. 求部分分式 (Partial Fractions): $\frac{x+2}{x+1} + \frac{3x}{x-1}$ 这里计算的特点是在运算多项式方面方便简单. 比如说, 化简 (Simplify) $\frac{x+2}{x+1} + \frac{3x}{x-1}$ 得到 $2\frac{2x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)}$, 而你想得到的分母要乘出来, 那么你只需要选中分母、按住CTRL键的同时选用展开 (Expand) 命令展开它就可以了.
15. 求多项式的商 (Polynomials+Divide): $\frac{6x^3+5x^2-x+1}{x+3}$
16. 求多项式的商 (Polynomials+Divide): $(6x^3+5x^2-x+1)/(x+3)$
17. 求根 (Polynomials+Roots): x^3+3x^2+3x+1 , 注意乘号是给出的, 和下面的作一下比较:
18. 求根 (Polynomials+Roots): $5x^5+5x^4-10x^3-10x^2+5x+5$
19. 求根 (Polynomials+Roots): ax^2+bx+c
20. 求根 (Polynomials+Roots): x^3+3x+1 , 对于三次或者三次以下的多项式, MuPAD 使用通常的公式求根. 如果你想求这类简单形式的多项式的根, 改变一个十进制系数, MuPAD 会很快地用数值形式把根计算出来. 对比下面的例子:
21. 求根 (Polynomials+Roots): $x^3+3.0x+1$
22. 求根 (Polynomials+Roots): x^4-2x-3 , MuPAD 使用通常的公式寻找四次多项式的根, 并把它的所有根显示在一个列矩阵中. 但是MuPAD并不能象征性地找到任何一个次数大于四的多项式的公式解. 看看下面的例子里发生了什么.
23. 求根 (Polynomials+Roots): x^5+7x^2+x+1
24. 求根 (Polynomials+Roots): $x^5+(7+i)x^2+x+\pi+i$
25. 求根 (Polynomials+Roots): $x^5+7x^2+3ix+e$
26. 求伴随矩阵 (Polynomials+Companion Matrix): x^3+ax^2+bx+c
MuPAD坚持认为这是一个首一多项式.

8.4.7 极限

你也可以求极限. 极限函数lim在你单击  图标来找到. 你也可以在数学模式下直接

输入. 计算一个极限, 可以通过从运算 (Compute) 菜单内选择计算 (Evaluate) 或者按CTRL+E来进行. 计算下列极限:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+1}}{\sqrt{16x^2+x+2}}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} x/|x|$
5. $\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{|y|} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \arccos x$
7. $(x+1)^2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + (a+by)^2$

8.4.8 导数

Scientific WorkPlace 默认各种形式的求导符号: $\frac{d}{dx}$, $\frac{d^n}{dx}$, D_x , D_{xy} , $D_{x^s y^t} \dots$, $\frac{\partial}{\partial x}$, 和 $\frac{\partial^n}{\partial x^s y^t \dots}$, 其中 $s+t=n$. 留心下面例子中的大括号、小括号、中括号都被一样地接受. 仔细观察 *Scientific WorkPlace* 是如何处理下列不符合规范的表达式的.

把光标放到表达式 $\frac{d}{dx}(x^2)$ 中的任何地方, 从运算 (Compute) 菜单内选择计算 (Evaluate)

(或者按CTRL+E) 进行求导. 求下面的表达式的导数:

1. $\frac{dx^2}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}x^2$
3. $D_x x^2$
4. $D_x[x^2]$
5. $D_x(x^2)$
6. $\frac{\partial}{\partial x}x^2$
7. $\frac{\partial}{\partial x}\{x^2\}$
8. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2 + 3x$
9. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}((x^2 + 3x))$
10. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 + 3x)$
11. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2 + 3x)$
12. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 + 3x]$
13. $\frac{\partial}{\partial x \partial y}x^2 y^3$

Scientific WorkPlace 也会处理有内在联系的表达式. 隐微分法 (Implicit Differentiation) 被设置在微积分 (Calculus) 菜单项下, 这是有争议的.

8.4.9 不定积分

下面我们来学习不定积分的计算. *Scientific WorkPlace* 要做的一个基本问题就是判定积分对象以及正确选择积分变量.

把光标放在表达式 $\int(ax^2+bx+c)dx$ 的任何地方, 从运算 (Compute) 菜单内选择计算 (Evaluate) (或者按CTRL+E). 这种情况下, 表达式被依照正确的语法进行积分. *Scientific WorkPlace* 在积分中不仅允许语法不正确的表达式, 也允许不规范的表达式. 例如, 计算下列积分:

1. $\int \frac{1}{x} dx$
2. $\int \frac{dx}{x}$

3. $\int ax^2 + bx + c dx$
4. $\int ax^2$
5. $\int \frac{1}{x^n}$ 在这三个例子中, *Scientific WorkPlace* 必须选择一个积分变量, 这里选择的是 x . 如果积分变量不被指明, *Scientific WorkPlace* 就会选择一个积分变量, 而这个选择的变量通常是最后一个变量. 下列积分可以说明这一点.
6. $\int ax$
7. $\int xb$
8. $\int x a dx$
9. $\int \frac{1}{x^2+y^2}$
10. $\int \frac{x^2}{x^2+y^2}$, 对于没有定义的表达式, 在选择积分变量时, *Scientific WorkPlace* 通常会选择最后一个变量作为积分变量. 在分式中, 选择分子中的最后一个变量. 如果没有分子, 比如 $\int \frac{1}{x^2+y^2}$, 系统会观察分母, 并选择分母的最后一个变量作为积分变量. 因此得到上面的结果. 当然, 你可以自己指定通常的 dx 为一个积分变量, 以供 *Scientific WorkPlace* 挑选. 最后, 看看下面三个例子出现了什么情况:
11. $\int f$
12. $\int f(x)$
13. $\int f(x) dx$

事实上, 最后三个积分并不是例外. 对于其中第一个例子, f 被看作 x , 也就是把整个表达式看成 $\int f df$. 在第二个中, 由于 f 没有被指定为函数, *Scientific WorkPlace* 把 $f(x)$ 看成 $f \times x$, 这样, 就选择了 x 作为变量, 整个表达式就是 $\int f \times x dx$. 如果 f 被指定为函数, 就象我们后来知道如何去做的, 那么 $\int f(x) dx$ 就是把它看作以 x 为变量的表达式 $f(x)$ 的积分, 就和事实是一样的.

8.4.10 分步运算

这里有些例子可以表明你可以按照你希望的进度改变运算顺序.

分步运算 光标放在表达式 $\int e^{ax} \cos bx dx$ 中, 然后从运算 (Compute) 菜单内选择计算 (Evaluate). 在不移除光标的情况下从运算 (Compute) 菜单内选择分解 (Factor), 就会有下面的结果:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a(\cos bx)e^{ax} + be^{ax} \sin bx}{a^2 + b^2} = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2}$$

现在把光标放在 $\int 2^x \cos bx dx$ 中, 从运算 (Compute) 菜单中依次选择以下命令执行: 计算 (Evaluate), 展开 (Expand) 以及分解 (Factor). 你就会看到以下形式的结果:

$$\int 2^x \cos bx dx = \frac{2^x \ln 2 \cos bx + 2^x b \sin bx}{b^2 + \ln^2 2} = 2^x (\ln 2) \frac{\cos bx}{b^2 + \ln^2 2} + 2^x b \frac{\sin bx}{b^2 + \ln^2 2} = 2^x \frac{\ln 2 \cos bx + b \sin bx}{\ln^2 2 + b^2}$$

注意结果的最后形式和上题是一样的. 这里, 你看到的是 MuPAD 处理指数和幂指数甚至极限在一起时的不同. 这些例子表明你可以影响系统以获得你想要的结果. 这种影响可以是固定的, 也可以是随意的. 你可以按照别的顺序来试试看, 错误的操作很可能会得到一个非常大的表达式.

8.4.11 定积分

要计算一个定积分, 只要把光标放在表达式中, 然后选择运算 (Compute) 菜单中的计算 (Evaluate), 或者按 CTRL+E, 或者数值计算 (Evaluate Numerically) 就可以了. 分别对 $\int_0^1 x dx$ 使用以上三种方法试试.

计算下面的定积分:

1. $\int_0^\pi \sin x dx$

2. $\int_0^1 \ln x dx$
3. $\int_0^1 e^x dx$
4. $\int_0^\pi x \ln \sin x dx$
5. $\int_0^\infty e^{-x} dx$
6. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$
7. $\int_1^\infty \frac{1}{x^5} dx$
8. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx$
9. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$
10. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$
11. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$
12. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$
13. $\int_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x}$
14. $\int_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x^2}$
15. $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$
16. $\int_0^\infty \frac{x^{13}}{e^x - 1} dx$

8.4.12 数值积分

数值积分可以选择运算 (Compute) 菜单中的数值计算 (Evaluate Numerically) 来进行。对下面的例子执行这样的操作：

1. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$
2. $\int_0^1 \sin x^3 dx$
3. $\int_0^1 \sin^3 100x^5 dx$
4. $\int_0^{4\pi} \cos x \log x dx$
5. $\int_0^1 x^{-.8} \sqrt{1-x^4} dx$

8.4.13 无穷级数

很多表达式可以通过运算 (Compute) 菜单中幂级数 (Power Series) 展开成无穷级数，这时会有一个对话框出现，里面有两个选项：一个是展开的项数，另一个是展开的最高幂次。展开项的缺省值是5，而展开的最高幂次必须填写。

1. e^x 按 x 幂级数展开
2. e^{2x+3y} 按 $x-1$ 幂级数展开
3. e^{2x+3y} 按 $y-2$ 幂级数展开
4. $x \sin x$ 按 x 幂级数展开
5. $x \sin x$ 按 y 幂级数展开
6. $\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}$ 按 $x+1$ 幂级数展开

8.4.14 代入表达式求值

系统接受这样的形式： $\text{expr}|_{\text{sub}}^{\text{super}}$ ， $\text{expr}|_{\text{sub}}^{\text{super}}$ ， $[\text{expr}]_{\text{sub}}^{\text{super}}$ ， $\text{expr}|_{\text{sub}}^{\text{super}}$ 和 $\text{expr}|_{\text{sub}}$ ， $\text{expr}]_{\text{sub}}$ ， $[\text{expr}]_{\text{sub}}$ ， $\text{expr}|_{\text{sub}}$

注意开始三个形式中，“ expr ”都有从  对话框中选择适当的分隔符，左边的分隔符是空分隔符，也就是说，是一个空括号。空括号不会被打出来，即使在屏幕上看得见也是如此。

含有的上标和下标是在表达式中要被替代的部分。如果只有下标，那么表达式只有那一部分被替代；如果两者都有，我们得到的是上标代入的表达式减去下标代入的表达式后的表达式。对下面的例子应用从运算（Compute）菜单内选择的计算（Evaluate）命令：

1. $xy|_{x=2}^{x=5}$
2. $xy|_{x=2}$
3. $(x+y)^4|_{x+y=z}$
4. $xy|_{x=2,y=3}$
5. $xy|_{x=2,y=3}^{x=4,y=5}$
6. $[xy]_{x=2,y=3}^{x=4,y=5}$
7. $xy|_{x=2,y=3}^{x=4,y=5}$
8. $\int \sin x dx|_{x=0}^{x=1}$
9. $\int \sin x dx|_0^1$
10. $\int \sin x dx|_{x=0}^{x=1}$
11. $\int \sin x dx|_0^1$

8.5 矩阵

8.5.1 标准运算

MuPAD 拥有一个功能强大的用于矩阵运算的工具包。从运算（Compute）菜单内选择矩阵（Matrices）会出现一个可以用于单一矩阵计算的命令集合。*Scientific WorkPlace*使用的矩阵操作有加、乘以及数量和矩阵的其他运算。下面列出了一些应用：

1. 对 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ 从运算（Compute）菜单内选择计算（Evaluate），结果是 $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$ ，它外面有方括号。*Scientific WorkPlace*在计算结果中使用和原来的表达式一样的括号，这样的括号有圆括号和方括号。
2. 计算下面的表达式： $a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ ，对这个例子试用其余的MuPAD 命令，如化简和展开。计算下面的表达式：
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}^2$
5. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$ ，计算它的数值。
6. 因式分解这个矩阵： $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ ，因式分解等，都是对矩阵的基本运算。
7. 计算表达式： $5 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ，注意这里的处理： M 被看成是一个 2×2 阶单位矩阵的5倍。计算含有多项式的矩阵是很方便的，例如下面的例子：
8. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^2 - 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 2$

9. 指数含有矩阵的情况：计算 $e^{t \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}$. 当然，象这类矩阵表达式可以用一个符号来标记它，也就是说，作这样的定义： $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ，然后把原来的表达式写成了 e^{tA} . 我们在定义那一节将学习具体的操作.

8.5.2 矩阵子菜单项

下面的例子是用来说明Matrices子菜单项下命令的用法的. 使用指定命令：

1. 转置伴随 (Adjugate): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
2. 合并 (Concatenate): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
3. 特征多项式 (Characteristic Polynomial): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 这一操作选择变量 X 作为多项式. 它选择变量的形式不会混淆矩阵变量. 例如, 找出 $\begin{pmatrix} \lambda & x \\ X & y \end{pmatrix}$ 的特征多项式.
4. 列基 (Column Basis): $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
5. 条件数 (Condition Number): $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
6. 正定测试 (Definiteness Tests): $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
7. 行列式 (Determinant): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 这里可以直接使用 `det` 函数, 也可以在数学模式下输入或者通过单击  列表中的函数 `det`. 所以你可以通过计算 $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 来计算一个矩阵的行列式. 现在, 试着计算 $\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ 并因式分解其结果.
8. 对矩阵 $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 使用矩阵 (Matrix) 菜单项下的特征向量 (Eigenvectors) 和特征值 (Eigenvalues) 命令. 并在适当的时候试用准确值 (Exact) 和数值解 (Numeric) 命令.
9. 分数自由高斯消元法 (Fraction Free Gaussian Elimination): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
10. 高斯消元法 (Gaussian Elimination): $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
11. 在矩阵 (Matrix) 菜单项中选择埃尔米特转置 (Hermitian Transpose) 会有明显的结果. 你也可以使用上标 H 来获得矩阵的共轭转置矩阵. 试试: $\begin{pmatrix} i & 2+i \\ 4i & 3-2i \end{pmatrix}^H$

12. 求逆 (Inverse): $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 你也可以通过计算 A^{-1} 来得到逆矩阵. 试试看.
13. 约当形式 (Jordan Form): $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 会得到一个象 PJP^{-1} 形式的乘积形式的矩阵, 其中 J 就是约当形式.
14. 范数 (Norm): $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\left\| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right\|_2$
15. 零空间基 (Null Space Basis): $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
16. 正交测试 (Orthogonality Test): $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$
17. 不变式 (Permanent): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
18. QR分解 (QR): $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
19. 秩 (Rank): $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
20. 有理标准形式 (Rational Canonical Form): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
21. 行最简阶梯形 (Row Reduced Echelon Form): $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
22. 重组 (Reshape): $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
23. 行基 (Row Basis): $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
24. 奇异值 (Singular Values): $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
25. SVD 命令会产生形如 UDV 的乘积式子, 这里的 D 是单对角矩阵, U 和 V 是正交矩阵. 这个命令只能对数字形式的矩阵有效. 对上面的例子试用这一命令.
26. 史密斯范式 (Smith Normal Form): $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
27. 迹 (Trace): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

28. 转置 (Transpose): $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 你也可以使用上标 T 来获得转置矩阵, 计算 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T$.

8.6 解方程（组）

MuPAD 中的解方程 (Solve) 命令会给出方程及方程组的解. 在菜单项解方程 (Solve) 中含有四个选项: 精确解 (Exact)、整数解 (Integer)、数值解 (Numeric) 以及递归方程 (Recursion).

8.6.1 精确解

选择解方程 (Solve) 中的精确解 (Exact) 可以解 $2x = 4$. 解会出现在方程的后面. 试试看, 对 $y^3 - y - 1 = 0$ 作同样的操作. 方程组是通过输入一个 $n \times 1$ 阶矩阵来完成的, 一个方程占一行. 另外, 也可以直接输入显示, 用 ENTER 键来增加新方程. 当未知数的个数和方程的个数是一样的时候, 只要把光标放在方程组中的任何地方, 然后选择解方程 (Solve) 中的精确解 (Exact) 就行了. 未知数会被自动识别. 试试下面的例子:

1. 这是一个 2×1 阶的矩阵: $\begin{matrix} x^2 + 3y^2 = 7 \\ x^2 - 2y^2 = 2 \end{matrix}$

2. 独立显示形式:

$$x + y - 2z = 1$$

$$2x - 4y + z = 0$$

$$2y - 3z = -1$$

$$2x - y = 1$$

3. $x + 3z = 4$

$$x - y - 3z = -3$$

可以把线性方程组转化为它对应的矩阵形式来输入. 上面的两个例子对应的矩阵形式被写在了下面. 使用解方程 (Solve) 中的精确解 (Exact) 命令来解这些方程, 并比较结果和上面的有什么不同.

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

在未知数的个数和方程的个数一样时是没有问题的, 但是当未知数的个数多于方程的个数时, MuPAD 需要你指定要求解的未知数. 把光标放在方程的任何地方, 选择解方程 (Solve) 中的精确解 (Exact) 命令, 会有一个对话框弹出来, 要你选择要求解的变量. 对下面的表达式, 先求解 x , 再求解 y : $e^x = \frac{y+1}{y-1}$.

$$2x - y = 1$$

$$x + 3z = 4$$

对下面的两个方程中的未知数的组合, 当选择 x, y 和 y, z 时, 分别求解: $\begin{matrix} 2x - y^2 = 1 \\ x + 3z = 4 \end{matrix}$. 所求的解用二次方程根给出.

$$2x - y = e^x$$

$$x + 3z = 4$$

下面方程组的解以立方根的形式给出：

$$2x - y^2 = 1$$

$$x + 3z = 4$$

$$y + z^2 = 2$$

下面的例子也是一样，但是它含有小数点。这种情况下，只给出数值解。

$$2x - y^2 = 1.0$$

$$x + 3z = 4$$

$$y + z^2 = 2$$

8.6.2 数值解

解方程 (Solve) 下的数值解 (Numeric) 命令只在少数情况下使用。如果希望结果以十进制的形式给出，那么其中一个系数使用小数形式，然后选择解方程 (Solve) 下的精确解 (Exact) 命令。

解方程 (Solve) 下的数值解 (Numeric) 命令最初用于解超越方程。解方程 (Solve) 下的数值解 (Numeric) 命令，试图寻找一个数值解，但是即使解存在有时也求不出来。最重要的特征就是，你可以指定搜索间隔让变量取值。指定搜索间隔以获得理想的计算结果。试试这些实例：

1. $10x = e^x$ ，使用解方程 (Solve) 下的精确解 (Exact) 命令，并注意发生的情况。现在对下面的两个例子使用解方程 (Solve) 下的数值解 (Numeric) 命令。
2. $10x = e^x, x \in (1, \infty)$ ，注意红色的句法和没有省掉的空格。
3. 独立显示也可通过指定搜索间隔解方程：

$$10x = e^x$$

$$x \in (0, 1)$$

4. 对 $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 1 \\ x \in (0, 4) \end{pmatrix}$ 使用解方程 (Solve) 下的数值解 (Numeric) 命令，注意 (x, y) 是一个解，另一个 $(x, -y)$ 也是一个解。

5. 对 $\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 1 \\ x \in (0, 4) \\ y \in (0, \infty) \end{pmatrix}$ 使用解方程 (Solve) 下的数值解 (Numeric) 命令。

8.6.3 整数解

解方程 (Solve) 下的整数解 (Integer) 命令会寻找方程以及方程组的整数解。对下面的例子使用解方程 (Solve) 下的整数解 (Integer) 命令：

1. $3x + 4y = 10$

2. $3x + 2y = 5$

$$3x - z = 1$$

8.6.4 递归解

解方程 (Solve) 下的递归方程 (Recursion) 命令用于寻找一个递归解或者一个递归形式. 试试下面的操作:

$$1. y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = 0$$

2.

$$y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = 0$$

$$y(0) = -2$$

$$y(1) = 1$$

$$y(n+1) + z(n) = n + 2^{n+1}$$

$$3. z(n+1) - y(n) = n + 3 - 2^n$$

$$y(1) = 1$$

$$z(1) = 2$$

8.7 模算术

8.7.1 整数模 m

这里 *Scientific WorkPlace* 的基本运算是计算 $a \bmod m$, 其中, a 是一个整数, m 是一个正整数. 把光标放在表达式内, 然后选择 **Evaluate** 命令. 答案是一个非负的余数. 比如, $34 \bmod 4 = 2$, $-69 \bmod 13 = 9$.

如果 a 和 m 互质, 你也可以计算 $a^{-1} \bmod m$. 特别地你也可以计算 $a^{-1} \bmod p$, 这里的 p 是素数, 而 a 不是 p 的倍数. 比如, $23^{-1} \bmod 3 = 2$, 是因为 $23 \times 2 \bmod 3 = 1$. 所以你可以通过计算 $ax \equiv b \bmod m$ 来解同余式: $a^{-1}b \bmod m$. 求解同余式: $25x \equiv 8 \bmod 13$, 我们得到 $25^{-1}8 \bmod 13 = 5$. (注意对 $25x \equiv 8 \bmod 13$ 应用解方程 (Solve) 中的精确解 (Exact) 命令, 会导致一个形式上的操作, 得不到任何结果.) 实际上, $25(5) \bmod 13 = 8$. 你可以同时解两个同余式以消去一个同余式来解同余式组 (如果模量都是素数). 解下面的同余式组:

$$x \equiv 45 \bmod 237$$

$$x \equiv 19 \bmod 419$$

我们有 $x = 45 + 237k$, 然后把它代入第二个同余式, 就是 $45 + 237k \equiv 19 \bmod 419$. 那么, $237k \equiv 19 - 45 \bmod 419$, 则 $k \equiv 237^{-1}(19 - 45) \bmod 419 = 60$. 因此, $x = 45 + 237 \times 60 = 14265$. 这个解不是唯一的结果, 比如 $(237 \times 419) = 99303$. 解下面的同余式组, 并检查你的答案:

$$x \equiv 36 \bmod 111$$

$$x \equiv 18 \bmod 237$$

$$x \equiv 120 \bmod 419.$$

输入 $a^n \bmod m$, 然后计算, 就可以计算含有指数的模式了. 你可以根据你的需要, 定义一些东西. 比如, 定义 $a = 2789596378267275$, $n = 3848590389047349$, $m = 2838490563537459$.

计算 $a^n \bmod m$ 以及 $2789596378267275^{3848590389047349} \bmod 2838490563537459$. 这样的计算会很快完成.

8.7.2 矩阵模 m

mod函数也适用于矩阵. 这里有些例子:

1. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 12 \\ 9 & 4 & 34 \end{pmatrix} \bmod 3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 5 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \bmod 11 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 5 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix} \bmod 11 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

注意第一个操作的书写格式, 在第二个中, 使用了矩阵的逆mod 11. 第三个中, 左边是两个矩阵的积, 并用它们的乘积结果再mod 11.

8.7.3 多项式模 m

mod函数也适用于多项式. 表达式 $p(x) \bmod 5$ 反映的是多项式 $p(x)$ 的系数依次mod 5. 例如 $8x^2 + 42x - 31 \bmod 5 = 3x^2 + 2x + 4$, 就是依次计算每个系数模5. 注意这里的多项式不需要括号.

1. $(8x^2 + 42x - 31)(13x - 23) \bmod 7$. 如果你展开这个表达式会得到 $6x^3 + 5x^2 + 3x + 6$; 如果你计算它会得到 $(x^2 + 4)(6x + 5)$. 展开 $(x^2 + 4)(6x + 5)$ 得到最后乘出来的结果就是 $6x^3 + 5x^2 + 24x + 20$, 再用它逐项mod 7. 当然, 你先用MuPAD中的展开(Expand)展开乘积, 然后再逐项mod 7, 只是需要简单地使用展开(Expand)命令.
2. 因式分解 $6x^3 + 5x^2 + 3x + 6 \bmod 7$
3. 计算下面的多项式, 并因式分解其结果, 再mod 7: $(9x^2 + 39x - 29) + (23x^2 + 13x - 23)$.

8.7.4 多项式模多项式

如果 $f(x) - g(x)$ 是 $q(x)$ 的倍数, 那么这两个多项式可方便地对 $q(x)$ 求模. 这里, 我们记作:

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{q(x)}.$$

计算 $g(x) \bmod q(x)$ 会很方便地得到严格最小幂次的多项式. 计算下面的两个多项式, 并对第三个应用多项式(Polynomial)中的商(Divide)命令:

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \bmod x + 1$
2. $x^5 - 4x^2 + 3x - 1 \bmod x^3 - x^2 + x - 1$
3. $\frac{x^5 - 4x^2 + 3x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

8.8 定义

当你选择运算(Compute)菜单下的定义(Definitions)时, 会出现以下子菜单: 新定义(New Definition)、取消定义(Undefine)显示定义>Show Definitions)、清除定义(Clear Definitions)、保存定义(Save Definitions)、恢复定义(Restore Definitions)以及定义MuPAD函数(Define MuPAD Name). 下面来看如何运用它们.

8.8.1 新定义、取消定义、显示定义、清除定义

有两种基本的新定义的方法:

1. 表达式, 例如: $x^2 + 2$, 或者一个矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 一个向量等等定义为一个符号 a .
2. 把表达式定义为一个函数 f , 如 $f(x) = x^2 + 2$. 这里, a 和 f 是不同的数学对象, 它们有不同的表现形式, 并接受不同的运算操作.

要下一个定义, 例如, $p = ax^2 + bx + c$, 只要把光标放在方程的内部, 或者选中方程, 然后从菜单项定义 (Definitions) 中选择新定义 (New Definition). 这称作一个指派, 从现在起, p 就代表表达式 $ax^2 + bx + c$. 它并不是一个函数, 特别地, $p(2)$ 不是等于 $4a + 2b + c$, 而是 $2p = 2ax^2 + 2bx + 2c$; 另外, $\int p dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx$, 而 $\frac{dp}{dx} = 2ax + b$.

用一个符号, 如: A , 代替矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 单击方程 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的任何地方 (或者选择你需要的部分), 再选择菜单项定义 (Definitions) 中的新定义 (New Definition). 那么你可以运算关于 A 的各种矩阵. 比如, 先定义 A , 然后用计算 (Evaluate) 或者 CTRL+E 计算 $A^2, 5A, A^{-1}$. 那么: $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$, $5A = \begin{pmatrix} 5a & 5b \\ 5c & 5d \end{pmatrix}$, 以及 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$.

子菜单选项取消定义 (Undefine) 显示定义 (Show Definitions)、清除定义 (Clear Definitions) 是自明的. 显示定义 (Show Definitions) 用来显示所有新定义, 清除定义 (Clear Definitions) 用来清除已下的定义. 清除某一特定定义: 把指针放在定义的表达式上, 选择取消定义 (Undefine). 符号不需要在表达式中, 比如: a 被定义为 $a = 2x + 4$, 那么无论选择数学或者文本中的“ a ”, 然后使用取消定义 (Undefine) 命令, 就可以清除对 a 的定义.

下面的例子你可以试试. 首先, 试试清除定义 (Clear Definitions), 很容易忘记把某一表达式定义为某一符号, 那么如果某个符号后面用到, 你会得到错误的结果. 例如, 你忘记了已定义的 $a = x^2$, 后来计算 $\int a ds$, 希望得到 $\frac{as^2}{2}$, 但你得到的是错误的结果. 在某些复杂的计算中, 这种错误是明显的. 现在试用清除定义 (Clear Definitions).

定义 $p = ax^2 + bx + c$, $q = 4y^2 + 3xy + 2$, 以及 $A = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 计算下面的表达式:

1. $p + q$
2. pq
3. $3p + 4q$
4. $p/(x+1)$, 对这个和下个例子使用多项式 (Polynomial) 中的商 (Divide) 命令.
5. $q/(y^2 + 1)$
6. A^2
7. pA
8. $\int p dx$
9. $\frac{dp}{dx}$
10. $\int p$
11. $D_x(pq)$
12. $\int pq dy$
13. $\int \int pq dy dx$
14. $q \bmod 2$

在积分中含有被定义的表达式, 在没有指定积分变量的情况下, MuPAD 会选择变量, 并且, 在模糊的情况下, 结果不会被说明. 对上面最后两个例子, 定义 $a = x + y$, $b = x + y$,

然后试试看.

注意当积分中含有没有指定积分变量的定义表达式时, 积分变量会被系统指定, *Scientific WorkPlace* 确定的积分变量可能与你心目中想的不一样. 这种情况也被用于求和及求积中含有被指明变量的情况中. 比较 $\sum_{x=1}^3 a$ 和 $\sum_1^3 a$ 的区别. 对定积分用这个命令, 注意观察在模糊的情况下 MuPAD 的选择.

1. $\int xa$
2. $\int xadx$
3. $\int \frac{1}{x^2+y^2}$
4. $\int \frac{x^2}{x^2+y^2}$

把表达式定义为其它形式也是合理的. 比如, 你可以定义: $r = 3p - cq$ 和 $s = nr + \frac{dp}{dx}$.

现在定义 $r = 3p - cq$, $s = nr + \frac{dp}{dx}$, $a = 2x + 3y$ 以及 $a = a - x$, 并完成下面的计算. 不要忘记: p, q 在前面已经被定义了: $p = ax^2 + bx + c$, $q = 4y^2 + 3xy + 2$.

1. $r + cq$
2. $\int (s - nr)dx$
3. a
4. $\frac{da}{dx}$

把光标放在方程中, 选择定义 (Define) 菜单项中的新定义 (New Definition), 可以把 f 定义为关于 $ax^2 + bx + c$ 中 x 的函数, 记作: $f(x) = ax^2 + bx + c$. 现在符号 f 代表了一个函数, 并且在计算中表现出函数的性质. 现在对同一个函数做这样的定义: $f(y) = ay^2 + by + c$. 在定义函数时被用做函数自变量的符号是没有意义的. 你可以使用先前定义用过的符号, 甚至 f 本身. 下面两个例子, 定义函数 g 和 h , 并在 t 处计算它们的值. 开始前先清除已有定义.

1. $g(x) = x \sin x$
2. 计算 $g(t)$
3. $h(x) = x^2$
4. 计算 $h(t)$

定义好了函数 f , 那么对无论何处的 f , 只要选中 f , 然后应用取消定义 (Undefine) 命令就可以解除原来的定义. 同样地, 也可以把光标放在被定义的方程中, 再应用取消定义 (Undefine) 命令, 二者效果一样. 清除定义 (Clear Definitions) 命令当然也能达到同样的效果.

如果你从菜单项定义 (Define) 中选择了显示定义 (Show Definitions) 命令, 那么会弹出一个对话框显示有效的定义: 包括定义的表达式、序列以及函数. 对于序列的情况, 显示的实际上是 MuPAD 对整体进行计算, 而不是我们在作定义时要求 MuPAD 做的那样. 对于函数的情况, 显示的我们刚刚要求 MuPAD 作的定义, 而不是 MuPAD 已作的定义.

如果一个微分方程求数值解, 那么有联系的函数名称就会出现在显示定义 (Show Definitions) 窗口中, 并有关于数值解的过程的说明. 请在微分方程那一节留意这种情况.

如果 f 和 g 是被定义过的函数, 那么下面的例子是合理地作定义的实例. 你每重新定义一次 f , 新的定义就会替代原来的定义.

1. 重新定义 $f(x) = 2g(x)$
2. 计算 $f(t)$
3. 重新定义 $f(x) = g(x) + h(x)$
4. 计算 $f(t)$
5. 重新定义 $f(x) = g(x) - h(x)$

6. 计算 $f(t)$
7. 重新定义 $f(x) = g(x)h(x)$
8. 计算 $f(t)$
9. 重新定义 $f(x) = g(x)/h(x)$
10. 计算 $f(t)$
11. 重新定义 $f(x) = (g(x))^2$
12. 计算 $f(t)$
13. 重新定义 $f(x) = e(g(x))$
14. 计算 $f(t)$
15. 重新定义 $f(x) = g(x)^{h(x)}$
16. 计算 $f(t)$
17. 重新定义 $f(x) = g(h(x))$
18. 计算 $f(t)$, 如积分和微分, 对用下面的方式表示的函数来说是适用的.
19. $\int f(x)dx$
20. $\frac{d}{dx}f(x)D_x f(x)$
21. $\frac{df(x)}{dx}$
22. $f'(x)$

产生的结果是操作在表达式上, 而不是函数. 这就是我们为什么要使用 $f(x)$ 或者 $f(y)$, 而不是单单的 f 的原因. 我们没有补充一个代数函数. (象上面看到的最后一个例子) 注意一次求导符号已经被作为微分操作而补充进来. 当我们随便地把 $z' = x + y$ 作为一个表达式的名称时, 这里不允许用 z' 作为被定义的函数的名称. 当 f 被定义为一个函数名称时, 则 $f'(x)$ 指的是表达式关于 x 的一阶导数, $f''(2)$ 指表达式关于 x 的二阶导数在 $x = 2$ 的处的值.

现在定义 $f(x) = x^2 + 2x + c$, $g(x) = xy - c$, 并作下面的计算.

1. $f(0)$
2. $f'(1)$
3. $g''(t)$
4. $f(y)$
5. $f(g(0))$
6. $f(2) - g(c)$
7. $f(g(x))$
8. $D_x f(g(x))$
9. $\int_0^1 f(x)dx$
10. $\int_0^1 f(z)dz$
11. $\int_0^1 f(c)dc$
12. $D_x f(x)$
13. $\int D_x f(x)dx$
14. $D_x \int f(x)dx$
15. $f'(s)$
16. $f'(g(x))$

这里给出Define 的另外一些特征.

17. 定义 $a = e^{2x+3y}$ 、 $f(x) = x \sin x$ 后会得到一系列关于 a 和 $f(x)$ 的展开式.
18. 多项式函数可以看作矩阵来计算. 定义 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $p(x) = x^2 - 5x - 2$. 你可以解释

计算 $p(A)$ 的结果吗？一定要按两下CTRL+E键。

19. 在处理矩阵方程时，矩阵内可以含有参数，也允许一列或更多列是被定义的表达式。为了看出这一点，定义 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ ，从菜单项解方程（Solve）中选择精确解（Exact）命令做下面的题目：
20. $AX = b$ ，现在定义 $A = \begin{bmatrix} s & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ ，然后从菜单项解方程（Solve）中选择精确解（Exact）命令做下面的题目：
21. $AX = b$ ，由于某些原因，MuPAD 允许多列形式的 b 或者有系数的 A ，而不是二者都是同一种形式的方程。
22. 清除定义，然后定义 $f(x,y) = 23x^2y + 456xy + 512 \bmod 7$ ，计算：
23. $f(x,y)$
24. $f(12,2c)$
25. 重新定义 $f(t) = 3t^2 + 5t + 6 \bmod x^2 + 1$ ，计算：
26. $f(x^2 + x + 2)$
27. $f(x^2 + 1)$ ，提醒：不能定义 $f(x) = 3x^2 + 5x + 6 \bmod x^2 + 1$ 后再计算 f (含有 x 的多项式)。如果这样，就会改变模数，并得到无意义的结果。

8.8.2 用延迟计算的定义

用户可以用两种方法中的一种作定义。整体计算的那种方法可以应用前面已经作过的定义，而前面的那些定义是可以用于新的定义的。这样，如果先定义 $a = 1$ ，后面又定义 $x := a$ ，那么，在整体计算的情况下 x 有一个值等于1。在延迟估计的方法下，定义变成了 $x = a$ （没有冒号）， a 值的任何改变都会引起 x 值的变化。作定义时递归定义（比如， $a = a + 1$ ）是被绝对禁止的。

8.8.3 唤醒结果

解方程或方程组会得到解，但是，解的方程并没有被定义。为了能使用这些已求得解，可以选择方程定义（Definitions）下的新定义（New Definition）就可以了。

比如：唤醒方程组

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

它的解是 $\{z = \frac{5}{4}, y = \frac{11}{8}, x = \frac{17}{8}\}$ 。可以分别选择 $x = \frac{17}{8}$ ， $y = \frac{11}{8}$ ， $z = \frac{5}{4}$ ，再选择定义（Definitions）下的新定义（New Definition）就可以在以后的运算中使用 x ， y ， z 了。这个方法可以用鼠标选中方程然后单击定义图标或者从定义（Definitions）下的新定义（New Definition）命令就可以方便地完成。

8.8.4 保存定义、恢复定义

选择定义（Definitions）下的保存定义（Save Definitions）命令的效果就是储存所有当前文本中的有效的定义，并且在你储存文本时，定义也会被同时储存。恢复定义（Restore Definitions）命令是这样的一个转换：可以调用被储存在当前文本中的定义，并使它们处于激活可使用的状态。注意，每次调用储存过的定义都会覆盖先前已经储存过的定义，所

如果你想增加那些已经储存过的定义，你必须在储存定义之前使用恢复定义（Restore Definitions）命令。定义被按次序储存和再保存在它被定义的文本中。

事实上，有效的定义是和MuPAD的主程序联系在一起的，而不是和有些时候会产生混淆的具体文本。MuPAD的主程序会保存定义很长时间，就和我们一直使用Scientific WorkPlace一样，甚至我们可以在这个程序中编辑定义的数量。为了看出这一点，先作几个定义，然后选择显示定义（Show Definitions）来确定它们是有效的，然后打开一个文本。再选择显示定义（Show Definitions），并且相同的定义仍然是有效的。如果你在处理相关文本并想使用那些定义，这是很方便的；如果你不想使用，可以用清除定义（Clear Definitions）清除它们，使用恢复定义（Restore Definitions）激活储存在新文本中的定义。

设置（Settings）菜单项上的定义设置（Definition Options）选项，用于选定在储存和打开文本时，储存和再储存命令是否有效。

8.8.5 多变量函数

多变量函数被写成一个方程来定义，比如 $f(x,y,z) = ax + y^2 + 2z$ ， $g(x,y) = 2x + \sin 3xy$ 。方法是：选中方程，然后使用新定义（New Definition）。与单变量函数一样，我们可以对通过计算函数在某点的值得到的表达式进行运算。

8.8.6 行变量与列变量

如果想得到一系列函数值，可以按排列的形式把所有的数据输入系统，然后系统会返回含有函数值且维数相同的排列，用行矩阵或列矩阵表示。这样，如果定义 $R = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}$ ，

$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，那么当我们计算 $\sin R$ ， $\sin C$ 时会得到： $\sin R = \begin{bmatrix} \sin a & \sin b & \sin c & \sin d \end{bmatrix}$ ， $\sin C = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin 1 \\ \sin 2 \\ \sin 3 \end{bmatrix}$ 。这就和你对定义过的函数、含有定义函数的表达式以及含按升幂排列的表达式

进行的操作是一样。比如， $2^R = \begin{bmatrix} 2^a & 2^b & 2^c & 2^d \end{bmatrix}$ ， $R^2 = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{bmatrix}$ 。当底数和指数是行向量或列向量时，结果是底数对应的行向量而指数对应的是列向量的矩阵，不论排列是行排列还是列排列。在下面的例子中试试这些操作。首先，象上面那样定义 R 和 C ，再定义 $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ， $f(x) = x \sin x$ 。在做完下面的例题后删除这些定义。

1. $f(C)$
2. $f(S)$
3. $f'(S)$
4. $f''(S)$
5. 3^C
6. 3^S
7. $\log R$
8. R^C
9. R^S

8.8.7 矩阵值函数

我们可以定义矩阵函数，比如下面的这个：

$$\theta(x) = \begin{bmatrix} x & \sin x \\ e^x & x^3 \end{bmatrix}$$

这时，可以对它计算及求导。比如， $\theta(\pi) = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ e^\pi & \pi^3 \end{bmatrix}$ ， $\theta(\pi i) = \begin{bmatrix} i\pi & i \sinh \pi \\ -1 & -i\pi^3 \end{bmatrix}$ ，计算 $\theta'(x)$ 和 $\theta'(\pi)$ ，或者求其它阶次的导数。

8.8.8 分段函数

另一种含有矩阵值函数的是分段定义的函数，这类函数在不同的定义域里有不同的表达式。下面有两个例子。

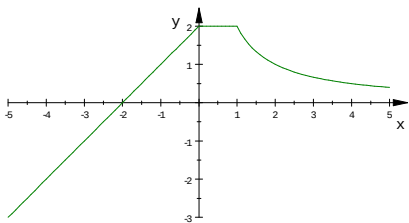
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x < 0 \\ 2 & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 2/x & \text{if } 1 < x \end{cases}$$

计算 $f(0)$ ， $f(1)$ ， $f(2)$ 。

计算

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 0 \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } 0 < x < 1 \\ \text{undefined} & \text{if } x = 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{if } 1 < x \end{cases}$$

作出 $f(x)$ 在直角坐标系下的二维图形（Plot Rectangur）： f



用定义（Definitions）菜单下的新定义（New Definition）命令定义：

$$h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x < 1 \\ 3/x & \text{if } 1 \leq x \end{cases}$$

计算下列各式的值：

1. $\int_0^2 h(t) dt$
2. $\int_0^1 (x+2) dx$
3. $\int_1^2 \frac{3}{x} dx$
4. $\int_0^1 (x+2) dx + \int_1^2 \frac{3}{x} dx$

8.8.9 使用其它MuPAD函数

定义 (Definitions) 菜单下取消定义 (Undefine)、显示定义 (Show Definitions)、保存定义 (Save Definitions)、恢复定义 (Restore Definitions) 命令对这些MuPAD 中的函数同样适用, 就和 *Scientific WorkPlace* 支持的那些函数一样. 清除定义 (Clear Definitions) 命令不会删除这些定义. 它们可以用取消定义 (Undefine) 命令一起删除. 显示定义 (Show Definitions) 显示的函数与这些MuPAD 中的函数有一点小小的不同, 所以你可以知道那些是你使用的MuPAD 函数, 那些是 *Scientific WorkPlace* 中定义的函数.

8.8.10 自定义函数

在MuPAD 中可使用用户自定义函数功能. 在MuPAD 主程序中, 把函数保存为filename.mu. 按下面的方法使用 *yourfunction(x)*. 在 *Scientific WorkPlace* 中选择定义 MuPAD 函数 (Define MuPAD Name), 会弹出一个对话框, 在第一行输入 *yourfunction(x)*, 检验MuPAD 内部格式文件 (In MuPAD internal format file(.mu file)), 在文件栏中必须输入完整的路径, 应该是 \dirname\subdirname\filename.mu, 注意斜杠不能少. 你也可以查看所有合适的MuPAD 函数. 另一个无线检验框下的命令对这样的函数的操作和对上面讲过的MuPAD 函数是一样的.

8.9 二维绘图

Scientific WorkPlace 的绘图功能是最常用最强大的功能之一. 譬如, 可以很快地作出函数和方程的图象, 并修改图形, 也可以通过增加变量的取值数目来检查结果, 而这一点在以前是不容易做到的.

下面来介绍Plot 2D 菜单项下的各种选项. 按下面的方法来作含有一个变量的表达式的图象, 如: $x \sin x$, 把光标放在 $x \sin x$ 中, 从菜单项二维绘图 (Plot 2D) 中选择直角坐标 (Rectangular). 那么会在表达式后面出现含有表达式图象的框架, 并和表达式在同一行上, 它的下边界落在下一行基线上, 而光标则在图形的右边. 图象中使用默认的参量, x 变化范围是从 -5 到 5, 而 y 的范围则根据表达式确定. 在设置 (Settings) 菜单项中, 你可以改变默认的图象框架大小. 试作 $x \sin x$ 的图象.

用鼠标单击框架会出现8个黑色的手柄, 这表明选中了框架. 在这种状态下, 你可以按住其中一个然后拖动来改变框架的尺寸. 拖动角上的手柄时, 对角的手柄被固定, 而只改变相邻的两个边界. 边缘上的手柄只改变对应的边界. 图象随着框架的扩大或缩小而改变大小. 重新设置框架大小会同样地改变图象的大小. 如果框架被选中, 你可以单击鼠标左键并按住不放拖动来改变图象的上下位置. 对 $x \sin x$ 的图象尝试应用上面的这些操作.

可以有很多种方法使用 *Scientific WorkPlace* 作图. 如果想作 $y = x \sin x$ 的图象, 那么可以使用下面任何一种方法.

1. 单击或选中 $x \sin x$, 然后选择二维绘图 (Plot 2D) 下的直角坐标 (Rectangular) 命令.
2. 定义 y 为表达式 $x \sin x$, 然后指针放在 y 的右边, 或选中 y , 再选择二维绘图 (Plot 2D) 下的直角坐标 (Rectangular) 命令.
3. 定义方程 $f(x) = x \sin x$, 然后指针放在 $f(x)$ 内, 或选中 $f(x)$, 或者选中函数 f , 再选择二维绘图 (Plot 2D) 下的直角坐标 (Rectangular) 命令.

现在作函数 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 的图象. 在图象框架内双击, 框架上会出现8个灰色的手柄, 当鼠标在图象上时, 鼠标显示为一个手的形状. 这时, 图形处于选中状态.

为了改变图形的外观，可以双击图象，然后在图象上移动手形的鼠标，单击并拖动框架。框架的一个边缘会随你的拖动移动，而图象是固定的。当你松开鼠标时，框架回到了原来的位置，而图象的外观则发生了改变。这种特征被（面板）用于直角坐标平面直接获得图象各个不同部分。对上面 $x\sin\frac{1}{x}$ 的图象试用这一操作。

8.9.1 框架属性对话框

你可以使用图形特性（Plot Properties）对话框来预先设定框架大小和框架在文本中的放法。这里，我们以分段定义函数为例：

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{if } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{if } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{if } 1 < x \end{cases}$$

首先，定义 h 并作出它的图象。现在选中框架，或者选中图象，或者把指针迅速地放在图象的右边，从编辑（Edit）菜单中选择特性（Properties）中的选项卡布局（Layout），可以预先设定框架的大小以及框架在文本中的放置方法。（也可在同样的一页中选择框架或图象，再选择特性（Properties）图标。）可以通过选择行中（In line）、独立（Displayed）或者浮动（Floating）来设定框架。当设定行中（In line）时，可以象前面说的那样上下移动框架。设定成In line 的框架，在文本中图象如同一个字一样，在它的左边加入其余的内容时，框架可以在同一行中移动。

设定独立（Displayed）或者浮动（Floating）选项时，图象会单独地显示在另一行的中心。在排版后打印时二者的效果是不同的：浮动（Floating）框架会被从中心移动以便于文本间隔；而独立（Displayed）框架可与屏幕上显示的一样打印出来。如果文本只含有几幅图象时，适合用浮动（Floating）框架；但是，如果有大量的图象时，打印出来的文本将不是你希望得到的文本形式。这种情况下，你可能会在每一页的上端看到一张图象，而且这些图象在文本涉及到的地方可能会出现很多幅。而还有一些图象可能会一起出现在手稿每一页的最后。

从布局（Layout）页选择独立（Displayed）显示一个框架，不选择图象或者单击独立（Displayed）图标，那个图标显示于数学文本中而不显示图画或图象。

8.9.2 同时绘出多个图形

把含有相同的变量的表达式用逗号隔开，把指针放在其中，选择适当的作图命令，可以同时作出它们的图象。如果已经作好一个图象，并想在图象中加入其它表达式的图象，那么只要简单地把表达式拖入已作好的图象。如果 $f(x)$ 是已经定义的函数，你可以通过把 f 或者 $f(x)$ 拖入图象以加入 $f(x)$ 的图象。注意：对于分段定义的函数，拖动的是名称，而不是表达式 $f(x)$ 。也可以使用后面要讲到的对话框来增加图象。

8.9.3 成组绘图

在同一幅图中作出多项式 $x^3 - \frac{8}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2$ 和 $\sin 2x$ 的图象：单击 $x^3 - \frac{8}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2, \sin 2x$ 的任何地方，选择二维绘图（Plot 2D）下的直角坐标（Rectangular）命令。 $\sin 2x$ 的图形看上去不理想。选择图形或框架，或者快速地把指针放在图画的右边，从编辑（Edit）菜单中选择菜单项特性（Properties）下的对话框，有五个选项卡。阅读下面的注意点，然后作出一张合适的图象。（可以通过选择图象，或者把指针放在图象的右边，再选择特性图标获得。）

选项卡绘图项目 (Items Plotted) 的左上角的选项盒里有一个你已作的图的表达式或者函数. 它们被作为选项列在选项表中, 你可以用单击上下箭头浏览当前作过图的表达式或者函数; 你也可以通过编辑显示选项、增加新的选项或者删除列表中的选项改变作过的曲线图形. 在选项盒中编辑选项可以改变选项; 选择增加项目 (Add Item) 再把选项写入弹出来的空的选项盒中, 就可以增加选项; 单击箭头直到选项出现在选项盒中, 然后选择删除项目 (Delete Item) 可以删除选项.

你可以通过编辑在变量与区间 (Variables and Intervals) 中的数字来设置取点的间隔.

图象形状是由各点数据计算决定的. 你可以通过增加取点数量 (Sample Size) 来增加图象的精确度. 因为增加取点数量会减慢作图过程, 可以在示例中得到相对少量数据点的图象, 并且在打印的文本中得到大量数据点的图象.

在作图中, 计算的数据点以线段联结在一起, 或者以点显示, 这取决于你对绘图样式 (Plot Style) 下的线 (Line) 及点 (Point) 的选择. 默认选择是线 (Line), 就是各点以线段联结. 你可以通过改变线样式 (Line style)、线粗细 (Line Thickness) 来改变图象中线的显示形式. 也可以选择点 (Point), 这样显示出来的图形只显示计算点, 可以在点标记 (Point Symbol) 中选择点的形状.

8.9.4 轴和视图页面

在线性 (Linear)、对数 (Log)、双对数 (Log-Log) 中选择坐标轴定标 (Axis Scaling). 也可以在 Normal, Boxed, Framed 或者 None 中选择坐标轴的类型 (Axes Type). Normal 和 None 就不加说明了. Boxed 的形式就是图形显示在一个矩形框中; Framed 指在图形框的左边和下面有框架. 所有这些选项 (除了 None) 在坐标轴或者图形框的边界上都会有数字坐标.

在视图 (View) 选项卡中不检验视图区间 (View Intervals) 的无线检验框, 输入数字来指定图形外观, 或者选择默认值. 选择默认值, 含在图象中的信息会最大限度地反映在图象外观里. x 轴和 y 轴的刻度是不一样的, 通常情况下曲线的上端和下端不会被截去. 在人坐标轴定标 (Axes Scaling) 选项卡中选择沿着每个坐标轴相等定标 (Equal Scaling on Each Axis), 会使 y 轴的刻度和 x 轴的刻度一样.

8.9.5 点列绘图

除了表达式作图, 还可以直接指定点, 并根据这些点作图, 这样的图形是把列出的点用线段顺次连接. 比如, 把光标放在 $[(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (1,1)]$ 内, 然后选择二维绘图 (Plot 2D) 下的直角坐标 (Rectangular). 需要对图形作适当的修改并设置适当的 x 和 y 的范围以使图形看上去象一个正方形.

各种形式的点都适用. 在上面的列表中, 点列外面的括号是可有可无的, 但是最外面的方括号是不可缺少的. 这些点也可用 $n \times 2$ 阶的矩阵的形式输入.

8.9.6 保形绘图

一个复杂的函数 $F(z)$ (z 和 $F(z)$ 都是复数), 作图是有些困难的, 因为通常的作图需要四维. 一个复数函数 $F(z)$ 的正投影图是一个由横线和竖线构成的二维网的图片. 默认值是 11×11 的网格, 间隔是 $0 \leq x \leq 1$ 及 $0 \leq y \leq 1$ 的十分之一. 如果 $F(z)$ 是解析的, 在每个 $F'(z) \neq 0$ 的点都会保角, 因此图形是两组在正确的角处相交的网格的曲线图象.

想画出一个表达式, 比如 $z^2 + 2z - 1$ 的正投影图, 只需把光标放在表达式内, 然后选择

二维绘图 (Plot 2D) 菜单下的保形 (Conformal) 命令. 网格线的条数及外观可以在对话框中修改. 作下列表达式的正投影图:

1. z^2
2. $z^2 + 2z - 1$
3. $\frac{z-1}{z+1}$

8.9.7 向量和梯度域绘图

给二维或三维空间内的每个点赋一个向量值的函数叫做向量域. 向量场 (Vector Field) 操作需要两个含有两个变量的表达式, 这两个变量分别代表向量域内横向量和纵向量. 想要作出向量域, 输入两个二元表达式, 代表向量域内水平和竖直的部分. 把光标放在向量内, 选择二维绘图 (Plot 2D) 下的向量场 (Vector Field) 命令. 试着对向量域 $F(x,y) = [x+y, x-y]$ 用上述操作.

对每个点赋予该点的 f 的一个梯度的向量域, 叫做函数 f 的梯度域. 梯度域绘图, 就是把光标放在 $f(x,y)$ 的表达式内, 然后选择二维绘图 (Plot 2D) 下的梯度 (Gradient). 对 $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ 试用上述操作.

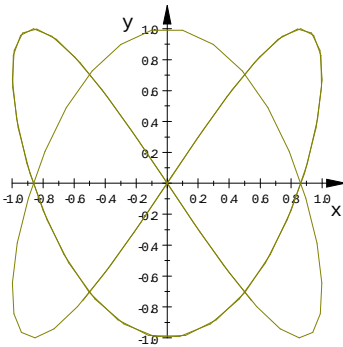
8.9.8 参数方程

到目前为止, 我们仅使用了二维绘图 (Plot 2D) 下的直角坐标 (Rectangular) 命令, 还有其余的一些方法用于描述平面上的曲线.

二维参数曲线由两个方程来定义, 如 $x = f(t), y = g(t)$. 这样的曲线决定点 $(f(t), g(t))$, 而这里的 t 按一定间隔变化. 想作出参数曲线, 要先把两个定义好的表达式作为向量的元素. 向量可以使用普通形式, 包括以下形式: $[\sin 2t, \cos 3t], (\sin 2t, \cos 3t), \begin{bmatrix} \sin 2t & \cos 3t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \sin 2t & \cos 3t \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 3t \end{bmatrix}$, 或者 $\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$, (后面的四个分别是: 两个 1×2 阶的矩阵, 两个是 2×1 阶的矩阵.)

作出定义的 $x = \sin 2t, y = \cos 3t$ 的参数曲线: 把光标放在向量内, 从二维绘图 (Plot 2D) 子菜单内选择参数方程 (Parametric).

$$\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$$



如果打开关于参数图象的图形特性 (Plot Properties), 在绘图项目中有一个关于直角坐标 (Cartesian) 和极坐标 (Polar) 的选择. t 的默认变化范围是 $[-5, 5]$. 如果 t 的范围大

些, 那么图画会扩大为原来的好几倍. 对这一特殊作图, 范围定义为 $[0, 2\pi]$ 会得到一条很光滑的曲线.

8.9.9 隐含方程

圆的方程不可以看作一个变量的函数. 你可以用二维隐含图象特征描出适合这类方程的一系列点: 把光标放在方程中, 选择二维绘图 (Plot 2D) 菜单项内的隐含方程 (Implicit) 命令. 对方程 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$, 应用上述操作. 这样得到的图象很糟糕, 打开作图对话框修改它. 首先, 不相同的 x , y 轴坐标会扭曲几何图形. 选择沿着每个坐标轴相等定标 (Equal scaling on each axis) 选项, 使得图形看上去象个圆; x 的范围设置为 $[0, 2]$, y 设置为 $[-2, 0]$; 还可以改变网格设置. 在刚作的图象和其它隐含方程图象上试用上修改操作.

8.9.10 极坐标

极坐标中的点 P 是用以原点为顶点并经过 P 的射线和极轴夹角 θ 以及 P 到原点的距离 r 描述的. 如果极坐标是用 x 轴表示的, 那么直角坐标系下的方程对应的极坐标方程由

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

给出, 或者由

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

给出. 输入一个由 r 和 θ 构成的方程, 单击方程, 选择二维绘图 (Plot 2D) 下的极坐标 (Polar) 命令, 就可以作出极坐标图形. 试作 $r = \sin 2\theta$ 的图形, 并调整作图对话框中的设置以获得美观的图形.

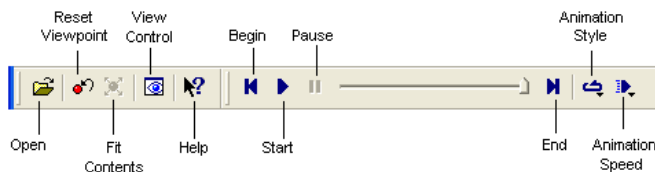
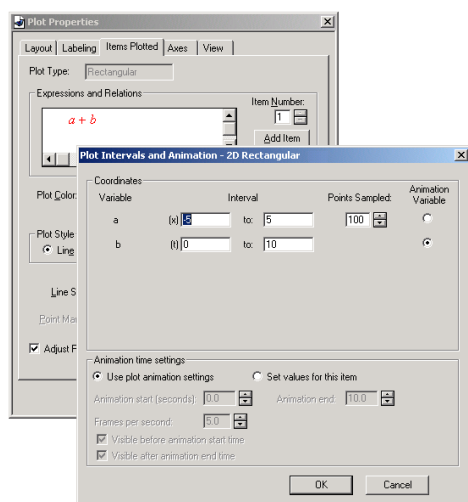
8.9.11 参数极坐标

$\theta = r^2$ 的极坐标的图形和向量 (r, r^2) 的二维图形是一样的. 使用二维绘图 (Plot 2D) 下的参数方程 (Parametric) 命令作出它的图形, 修改得到的图形: 选择极坐标 (Polar) 命令并设置参数的变化范围是0到10. 这是一个特殊的定义的情况: 半径 r 以及角度 θ 均以第三个变量 t 为参数. 比如: 可以作 $r = 1 - \sin t$, $\theta = \cos t$ 的参数极坐标图象, 就象使用二维绘图 (Plot 2D) 下的参数方程 (Parametric) 命令作向量 $(1 - \sin t, \cos t)$ 的图象一样. 选择极坐标 (Polar) 命令并设置参数范围: $0 \leq t \leq 2\pi$.

8.10 二维动画

在MuPAD中能利用VCAM窗口浏览二维动画. 为了绘制二维动画, 你必须规定第二个变量. 两个变量中必定有一个指定为动画变量. 一般性的作为水平方向坐标轴变量名为 x , t 作为动画变量. 如果使用另外的变量名, 系统会作出选择. 这种选择可在绘图区间及动画对话框作出改变. 即打开绘图特性对话框中的绘图项目 (Items Plotted) 选项卡, 其中 a 选作为水平方向坐标轴的变量, b 选作为动画变量. 在同一对话框中, 你能重置动画的时间.

你可选择工具 + 计算设置 + 二维绘图 (Tools + Computation Setup + 2D Plots), 选择绘图类型及设置动画开始、结束时间、每秒多少帧图形. 为打开VCAM窗口演示动画, 可单击绘图, 选择右下角的工具, 弹出VCAM窗口, 单击开始按钮. 参见如下对话框及动画播放栏:



8.10.1 直角坐标方程

输入含两个变量的表达式，将插入点置于表达式中，选择二维动画 + 直角坐标（Plot 2D Animated + Rectangular）。

$$t \cos 3x + (1 - t) \sin 2x$$

8.10.2 参数方程

输入形如 $(x(s, t), y(s, t))$ 的表达式，选择二维动画 + 直角坐标（Plot 2D Animated + Rectangular）或参数方程（Parametric），可设置 $0 \leq x \leq 1$ 及 $0 \leq t \leq 1$ 进行试验。先绘制 $(\sin 8\pi x, \cos 10\pi x)$ ，再输入下面的表达式，选择并拖曳到上面已画的图形框架中：

$$\begin{aligned} &(\sin 8\pi t + 0.02 \cos 2\pi x, \cos 10\pi t + 0.02 \sin 2\pi x) \\ &(\sin 8\pi x, \cos 10\pi x) \end{aligned}$$

8.10.3 极坐标

输入表达式 $r = \sin \theta t$ ，选择二维动画 + 极坐标（Plot 2D Animated + Polar），可设置 $-3.14159 \leq \theta \leq 3.14159$ 及 $3 \leq t \leq 5$ 进行试验。

$$\sin \theta t$$

8.10.4 极坐标中的参数化曲线

输入形如 $(r(s, t), \theta(s, t))$ 的表达式，选择二维动画 + 极坐标（Plot 2D Animated + Polar）。

$$(1 - t \cos \theta, \theta)$$

8.10.5 隐含方程

输入含参数 t 的方程，选择二维动画 + 隐含方程 (Plot 2D Animated + Implicit)。如下的例子设置 $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, $-1 \leq t \leq 1$ 进行试验。

$$x^2 + ty^2 = 1$$

8.11 三维绘图

空间曲线与平面的作图和曲面的作图情况很相似。图象显示在一个框架里，三维直角坐标系的各个坐标轴的范围是 $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$, $z_0 \leq z \leq z_1$ 。框架是和前面讲过的相同的屏幕上的一个矩形区域。*Scientific WorkPlace* 默认的坐标轴范围是 $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$, z 轴则自动确定。如果使用其它变量名称，那么范围顺序由字母顺序决定。作一个两个变量的表达式，比如 $x^2 - y^2$ 的图象：把光标放在表达式内，选择三维绘图 (Plot 3D) 下的直角坐标 (Rectangular) 命令。如果想同时作出几个表达式的图象，把这些表达式用逗号隔开再作就可以了。选中一个表达式，然后把它拖入三维图象就可以把这个表达式的图象加入到原来的三维图象中了。

你可以用两种不同的方法作出含有两个变量的已定义的函数的图象：选择函数名称 f 或者表达式 $f(x)$ ，然后选择三维绘图 (Plot 3D) 中的直角坐标 (Rectangular) 命令。把函数表达式拖入三维图象，就可以把它加入三维图象。

作一个三维直角坐标系下的图 $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-5 \leq z \leq 5$ (确省的 z 范围只产生了一条竖线。)

对上面的 $f(x, y)$ 的图象以及其它图形使用下面的作图工具。

8.11.1 三维绘图工具

选择框架或者图形，象二维作图中那样打开绘图特性 (Plot Properties) 对话框。

对话框中大多数选项和二维中的相似，但是，也有一些不同。在图象处于选中状态时可拖动长方体框架来旋转三维图形或利用 VCam 实时操纵三维图形。图象形状由计算的数据点决定。可以通过增加取点数量 (Sampling Size) 改善图画质量。当然，增加取点数量会减缓作图过程；所以，也许希望得到真实图形的相对少量的网格点，并且在打印的文本中得到相对大量的数据点。网格点根据平面或者曲线多项式计算；或者如果你选择显示类型，只显示点。绘图项目 (Item Plots) 选项卡中有众多选项，其中的表面样式：

- Color Patch: 用小斑点连接多项式曲面上以及网格线上的各点；
- Wire Frame: 它是默认选择，因为在这个选择下，三维图象会被很快的重画。它的形式是在透明的曲面上用直线连接各点；
- Hidden Line: 和 Wire Frame 相似，但是曲面是不透明的；
- Points: 只显示计算点。

还可以设置表面网格 (Mesh, ULines, VLines, Contours) 及定向阴影 (XYZ, XY, Z, Z Hue, Z Grayscale 或者 None)。选择 Z，就是说颜色选择依赖于 z 轴的颜色选择；选择 XYZ 意味着颜色是三个坐标轴的颜色函数。

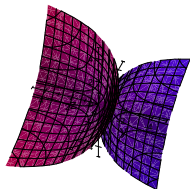
最后，在坐标轴类型 (Axes Type) 选项卡中可以选择坐标轴的显示形式：Normal, None, Boxed 或者 Framed。

- Normal: 如果原点在图象里，显示通常的三维直角坐标系 (x, y, z) ；否则，三个坐标轴会尽可能地靠近原点；
- Boxed: 图象显示在一个框架中；

- Framed: 显示图形框的左边边缘以及下面的两条边缘.

8.11.2 隐含方程

在文本中输入一个含有两个变量的隐含方程, 选择三维绘图 (Plot 3D) 菜单项下的隐含方程 (Implicit) 命令, 可以作出隐含方程的图象. 作出 $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = (x + y + z + 1)^2$ 的图象, 选择 Boxed 形式的坐标轴, 范围是 $-5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5, -5 \leq z \leq 5$, 旋转 (Turn) 设置为 111, 倾斜 (Tilt) 设置为 60.



8.11.3 参数化曲面

参数化曲面以方程 $x = f(s, t)$, $y = g(s, t)$ 以及 $z = h(s, t)$ 的形式给出. 这些是常用的名称, 而且允许产生其它名称变量的图象. 以向量形式输入表达式, 由逗号把各个表达式分开. 然后把光标放在向量内部, 选择三维绘图 (Plot 3D) 子菜单中的直角坐标 (Rectangular) 命令, 就可以作出这样的方程的图形.

参数化曲面被定义成下面的方程:

$$\begin{aligned} x &= s \sin s \cos t \\ y &= s \cos s \cos t \\ z &= s \sin t \end{aligned}$$

它的三维直角坐标系下的图象可以由向量 $[s \sin s \cos t, s \cos s \cos t, s \sin t]$ 作出. 作出它的图象, 设置 $0 \leq s \leq 2\pi, 0 \leq t \leq \pi$.

8.11.4 空间曲线

空间曲线可以写作三个含有一个变量的函数: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$. 作出这类曲线的方法如下: 把定义好的三个表达式作为一个向量的三个元素输入, 把光标放在向量里, 选择三维绘图 (Plot 3D) 下的管 (Tube) 命令. 双击图象, 可以改变曲线的粗细:

$$\begin{aligned} x &= -10 \cos t - 2 \cos 5t + 15 \sin 2t \\ y &= -15 \cos 2t + 10 \sin t - 2 \sin 5t \\ z &= 10 \cos 3t \end{aligned}$$

8.11.5 柱坐标

柱坐标是由一个三维数组 (r, θ, z) 给出的, 这里的 (r, θ) 是极坐标下的点, 而 z 是通常的直角坐标下的第三坐标. 因此, 可以用下面的方程把柱坐标方程转化为直角坐标下的方程:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

也可以用下面的方程把直角坐标方程转化为柱坐标下的方程：

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad z = z$$

默认的是 r 、 θ 和 z 的函数，所以必须写这个表达式。可以同时作出几个表达式的图象，只要把这几个表达式用（红色的）逗号隔开。也可以在一个坐标系下作出几个曲面，只要把表达式拖入已作的图形中。

作出柱体 $r=1$ 的图象，把它看成三维柱坐标下 θ 、 z 的表达式为1的图形。在同样的 θ 和 z 的范围内，作出三维柱坐标下的 $r=1-z$ 的图形。

定义 $r(\theta, z) = z + \sin \theta$ ，然后选种 r 作出它的三维图象，设置范围为： $0 \leq \theta \leq 4\pi$ ， $-1 \leq z \leq 1$ 。

8.11.6 柱坐标中的参数化曲面

在柱坐标中，可以把参数化曲面 $r = f(s, t)$ ， $\theta = g(s, t)$ ， $z = h(s, t)$ 以 r, θ, z 的表达式输入一个向量 $(f(s, t), g(s, t), h(s, t))$ ，然后选择三维绘图（Plot 3D）下的柱坐标（Cylindrical）命令作出参数化曲面的图形。

作出螺旋曲线 $z = \theta$ 的图象，就是作出三维柱坐标下的向量 $[r, \theta, \theta]$ 图象，其中 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 4\pi$ 。

8.11.7 球坐标

球坐标 (ρ, θ, ϕ) 中空间点 P ，由到原点的距离 ρ 、在 xy 平面上的旋转角 θ 、以及对于 z 轴正半轴的角度 ϕ 决定。把它转化为直角坐标就是

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

，那么距离满足：

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

默认状态下， ρ 是 θ 和 ϕ 的函数。在同一坐标下，用通常的方法可以作出至少一种曲面。用下面的方法作出一个球图形：在文本中输入含有 θ 和 ϕ 的表达式，然后把光标放在表达式内，然后选择三维绘图（Plot 3D）下的球坐标（Spherical）。试作表达式为 $2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ 的球的图象。

可以制作定义了含有 θ 和 ϕ 的函数，比如 $\rho(\theta, \phi) = (1.2)^\phi \sin(\theta)$ 的球的图象：选择方程名称 ρ ，或者表达式 $\rho(\theta, \phi)$ ，然后选择三维绘图（Plot 3D）下的球坐标（Spherical），设定 $-1 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq$ 。

8.11.8 球坐标中的参数化曲面

参数化曲面用 $\rho = f(s, t)$ ， $\theta = g(s, t)$ ， $\phi = h(s, t)$ 给出。这些是常用的名称，而且允许产生其它名称变量的图象。把定义好的表达式作为向量的三个元素输入，然后把光标放在向量内，选择三维绘图（Plot 3D）子菜单中的球坐标（Spherical）命令，就可以作出参数化曲面的图形。

向量 $[\rho, \theta, 1]$ 的三维球图形是一个锥体 $\phi = 1$ 。作出这个图形，设置 $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。

把 $\rho = s, \theta = s^2 + t^2, \phi = t$ 作为向量输入，作出曲面，设定 $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ 。

8.11.9 练习

这里有些例子，用于练习作图的各种方法，答案在后面。

1. 使用二维绘图 (Plot 2D) 下的隐含方程 (Implicit) 命令作出 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 1$, $x + y^2 = 0$ 在各种坐标轴下的图形。
2. 使用二维绘图 (Plot 2D) 下的隐含方程 (Implicit) 命令作出 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$, $(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$, $(x-1) + (y+2)^2 = 0$ 在二维坐标下的图形。选中图象，并旋转图象，使得它接近于上题中的图象。
3. 在同一幅图中作出 $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = 1$ 的图象。在图中有几个交点？把方程以矩阵形式输入，并对它应用解方程 (Solve) 菜单项下的数值解 (Numeric) 命令检验你的估计。
4. 作出星形线 $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ 的图象。
5. 作出直角坐标系下 $x^3 + y^3 = 6xy$ 的图象。
6. 作出曲面 $z = \sin xy$, 设定 $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$ 。并将它的背脊与三个隐含曲线 $xy = \frac{\pi}{2}$, $xy = \frac{5\pi}{2}$, $xy = -\frac{3\pi}{2}$ 的图象作比较。
7. 普通的微积分问题包括求两个弧度为1的圆柱的交点：使用三维绘图 (Plot 3D) 下的直角坐标 (Rectangular) 命令作出参数化曲面 $[s, \cos t, \sin t]$, $[\cos t, s, \sin t]$ 的图象。
8. 下面两个空间曲面

$$[(2 + \sin t)10 \cos t, (2 + \cos t)10 \sin t, 3 \sin 3t]$$

和

$$[10 \cos t, 10 \sin t, 3 \sin 3t]$$

相交吗？使用三维绘图 (Plot 3D) 下的管 (Tube) 作出图象，并找出交点。

9. 使用三维绘图 (Plot 3D) 下的隐含方程 (Implicit) 命令作出球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和平面 $x + y + z = \frac{1}{2}$ ，观察他们的相交情形。从 $x + y + z = \frac{1}{2}$ 中解出 z ，并把它代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 中，然后计算方程的判别式，会发现它们的交点是一个椭圆。
10. 作出曲面 $z = xy$ ，研究它的等高线，并在直角坐标 (Rectangular) 对话框中设置表面样式为 Color Patch 和表面网格为 Contour。旋转曲面直到曲线的最上端出现，并注明你看见的曲线；旋转曲线直到它的最上端消失，并注明等高线。

8.11.10 解答

1. 使用二维绘图 (Plot 2D) 下的隐含方程 (Implicit) 命令作出： $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 1$, $x + y^2 = 0$ (设置 $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$.)
2. 使用二维绘图 (Plot 2D) 下的隐含方程 (Implicit) 命令作出： $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$, $(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$, $(x-1) + (y+2)^2 = 0$ (设置 $-1 \leq x \leq 3$, $-4 \leq y \leq 0$.)
3. 使用二维绘图 (Plot 2D) 下的隐含方程 (Implicit) 命令作出： $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = 1$ (设置 $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$.)

使用解方程 (Solve) 下的数值解 (Numeric) 命令：

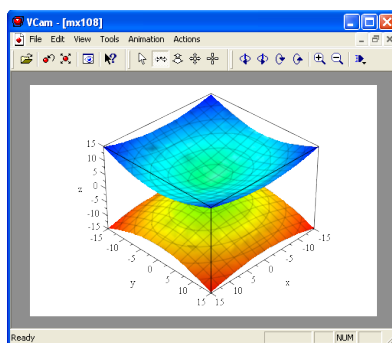
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 - y^2 &= 1 \\ x &\in (1, 2) \\ y &\in (1, 2) \end{aligned}$$

解是： $\{x = 1.58113883, y = 1.224744871\}$

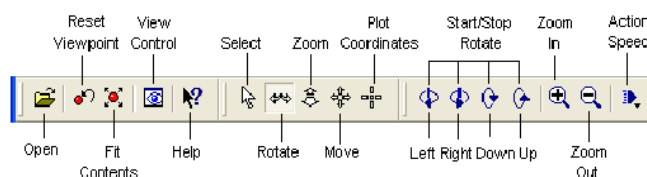
4. 使用二维绘图 (Plot 2D) 下的隐含方程 (Implicit) 命令作出: $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ (设置 $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$)
如果没有绝对值, *Scientific WorkPlace* 给出的只是第一象限的图象.
5. 使用二维绘图 (Plot 2D) 下的隐含方程 (Implicit) 命令作出: $x^3 + y^3 = 6xy$ (设置 $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$)
6. 使用三维绘图 (Plot 3D) 下的直角坐标 (Rectangular) 命令: $\sin xy$ (设置 $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$)
二维绘图 (Plot 2D) 下的隐含方程 (Implicit) 命令作出: $xy = \pi/2, xy = 5\pi/2, xy = 3\pi/2$ (设置 $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$)
7. 使用三维绘图 (Plot 3D) 下的隐含方程 (Implicit) 命令作出 $[s, \cos t, \sin t], [\cos t, s, \sin t]$ (设置 $-2 \leq s \leq 2$, $0 \leq t \leq 2\pi$)
8. 使用三维绘图 (Plot 3D) 下管 (Tube) 命令:
 $[(2 + \sin t)10 \cos t, (2 + \cos t)10 \sin t, 3 \sin 3t], [20 \cos t, 20 \sin t, -3 \sin 3t]$ (设置 $0 \leq t \leq 2\pi$)
 $(2 + \sin t)10 \cos t = 20 \cos s$
使用 Solve 下的 Exact 命令: $(2 + \cos t)10 \sin t = 20 \sin s$, 解是: $\{t = 0, s = 0\}, \{t = \pi, s = \pi\}$
 $3 \sin 3t = -3 \sin 3s$
9. 使用三维绘图 (Plot 3D) 下的隐含方程 (Implicit) 命令作出: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1/2$. (设置 $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, 与 $-1 \leq z \leq 1$.)
10. 使用三维绘图 (Plot 3D) 下的隐含方程 (Implicit) 命令作出: xy
(设置 $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, 旋转 (Turn) 设置为 90, 倾斜 (Tilt) 设置为 0, 并选择表面样式为 Color Patch 和表面网格为 Contour 的类型)
(设置 $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, 旋转 (Turn) 设置为 90 90, 倾斜 (Tilt) 设置为 90, 并选择表面样式为 Color Patch 和表面网格为 Contour 的类型)

8.12 三维动画

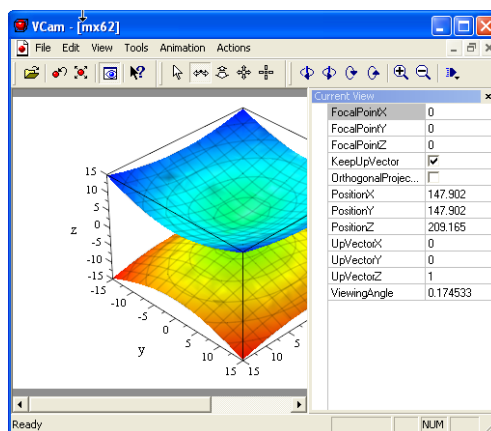
单击  激活 VCAM 窗口, 通过旋转三维曲面以便从不同角度视察曲面.



单击 VCAM 工具栏可进行各种操作: 旋转、放缩及移动, 也可利用鼠标进行控制.



单击帮助工具（Help tool）来打开用户帮助界面，利用其附加特性进行控制或编辑。

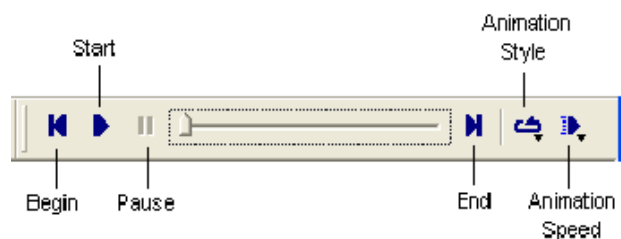


8.12.1 直角坐标

输入三个变量的表达式，选择三维动画 + 直角坐标（Plot 3D Animated + Rectangular）。如下的例子设置 $-5 \leq x \leq 5$ ， $-5 \leq y \leq 5$ ， $-3 \leq t \leq 3$ ，旋转（Turn）设置为 40，倾斜（Tilt）设置为 80 进行试验。

$$x^2 + y^2 + txy$$

通过如下的VCAM 工具栏进行操作：



8.12.2 直角坐标中的参数化曲面

输入形如 $(x(r,s,t), y(r,s,t), z(r,s,t))$ 的表达式，选择三维动画 + 直角坐标（Plot 3D Animated + Rectangular）。如下的例子表示了曲线 $z = 2 + \sin y$ 绕 y 轴旋转形成的曲面，其中设置 $-5 \leq s \leq 5$ ， $0 \leq r \leq 1$ ， $0 \leq t \leq 1$ ， t 为动画变量。

$$((2 + \sin s) \sin(2\pi tr), s, (2 + \sin s) \cos(2\pi tr))$$

8.12.3 柱坐标

输入三个变量的表达式，选择三维动画 + 柱坐标（Plot 3D Animated + Cylindrical）。如下的例子设置 $0 \leq z \leq 1$ ， $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 及 $0 \leq t \leq 2$ ，旋转（Turn）设置为 20，倾斜（Tilt）设置为 20。

$$1 - t \sin \theta$$

8.12.4 柱坐标中的参数化曲面

输入开如 $(r(u,v,t), \theta(u,v,t), z(u,v,t))$ 的表达式，选择三维动画 + 柱坐标 (Plot 3D Animated + Cylindrical)。如下的例子表示了锥形体的产生过程：直线 $z = r$ 绕 z 轴旋转，其中 $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ 及 $0 \leq t \leq 1$ ，旋转 (Turn) 设置为 20，倾斜 (Tilt) 设置为 40。

$$(-1 + 2r, 2\pi ts, -1 + 2r)$$

8.12.5 球坐标

输入三个变量的表达式，选择三维动画 + 球坐标 (Plot 3D Animated + Spherical)。如下的例子表示一个球的半径从1增大到2的过程，其中 $0 \leq t \leq 1$ 。

$$1 + t$$

8.12.6 球坐标中的参数化曲面

输入形如 $(\rho(r,s,t), \theta(r,s,t), \phi(r,s,t))$ 的表达式，选择三维动画 + 球坐标 (Plot 3D Animated + Spherical)。如下的例子表示球面变化为袋子样的曲面，其中 $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ 及 $0 \leq t \leq 1$ 。

$$(1 - t \cos 2\pi r, 2\pi s, \pi r)$$

8.12.7 隐含方程

输入含四个变量的方程 $z^2 = 1 + t(x^2 + y^2)$ ，选择三维动画 + 隐含方程 (Plot 3D Animated + Implicit)，其中 $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, $-2 \leq z \leq 2$, $-1 \leq t \leq 1$ 及选择 **Boxed Axes**。

$$z^2 = 1 + t(x^2 + y^2)$$

8.12.8 管

输入含两个变量的表达式，选择三维动画 + 管 (Plot 3D Animated + Tube)。如下的例子设置 $0 \leq s \leq 2\pi$ 及 $0.01 < t < 1$ ，且半径设置为 3。

$$\begin{bmatrix} -10 \cos ts - 2 \cos(5ts) + 15 \sin(2ts) \\ -15 \cos(2ts) + 10 \sin ts - 2 \sin(5ts) \\ 10 \cos(3ts) \end{bmatrix}$$

8.13 微积分

前面已经学习了微积分的基本运算。在菜单项微积分 (Calculus) 下有各种运算选项。下面来介绍这些选项。

8.13.1 隐含方程求导

方程，例如 $y^2 = -\sin xy$ ， y 是 x 的可微函数，但是我们不能解出 y 。我们仍然可以通过隐含的可微性求出 $\frac{dy}{dx}$ ，这是菜单选项的其中一项。比如，对 $y^2 = -\sin xy$ 想求 $\frac{dy}{dx}$ 。把个光标放在表达式中，选择隐微分法 (Implicit Differentiation) 命令，会有一个要求指定微分变量的对话框。选择 x 然后选择确定 (OK)，会得到 $2yy' + (\cos(xy))(y + xy') = 0$ 。

如果你想求 y'' ，再应用一次隐微分法 (Implicit Differentiation) 命令即可。在第一步中得到 $\left\{y' = -(\cos(xy)) \frac{y}{2y + (\cos(xy))x}\right\}$ ，而第二步中得到 $2y'y' + 2yy'' - (\sin(xy))(y + xy')(y + xy') + (\cos(xy))(y' + y' + xy'') = 0$ 。解这个式子得到 $y'' = -\frac{2(y')^2 - (\sin(xy))y^2 - 2(\sin(xy))xy' - (\sin(xy))x^2(y')^2 + 2(\cos(xy))y'}{2y + (\cos(xy))x}$ 。但是并不是都这么简单。例如，不能根据 x 和 y 解出 y' 。下面有些例子用于练习。

1. $y^2 = x$
2. $2y = x^2 + \sin y$
3. $x^2 - xy + y^2 = 5$
4. 如果 $y^2 + xy - 1 = 0$ ，在 $(0, -1)$ 点求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

8.13.2 迭代

用菜单项微积分 (Calculus) 下迭代 (Iterate) 命令可以解许多形如 $f(x) = x$ 的方程。估计它的根是 x_0 ，使用迭代 (Iterate) 命令得到 $f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), f(f(f(f(x_0))))$ ，直到你指定的迭代次数。适当的情况下，这些返回的值在 $f(x) = x$ 的一个根附近。这里有个例子。

选择菜单项微积分 (Calculus) 下迭代 (Iterate) 命令，在弹出的对话框中输入  作为迭代函数，选择 1.0 作为迭代值，10 作为迭代次数，会得到一个以 .74424 为最后一项的向量 (如果数据显示设置为 5)。

迭代函数对话框中输入的必须是函数名称，例如，不能使用 $\cos^2$ 。要迭代 $\cos^2(x)$ 这样的函数，要先定义 $f(x) = \cos^2(x)$ ，然后在迭代函数对话框中输入 f 作为迭代函数。

迭代函数 $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ 用的是寻找函数 f 零点的牛顿方法。试试下面的例子：

1. $x - \cos x$ ，这个例子中，在 .5 处开始迭代，迭代 10 次，会得到 .73909。对比在 $(0, 1)$ 区间内解 $x = \cos x$ 。
 $x \in (0, 1)$ 。
2. $x(2 - x^2)$
3. $x^2 + 1$

8.13.3 求极值

菜单项微积分 (Calculus) 下的求极值 (Find Extrema) 命令用于求函数极值，它是使用拉格朗日 (Lagrange) 插入法进行的。MuPAD 寻找两种信息：极值设置以及假设的极值处的备选值 S 。 S 可以包含没有极值对应的无关点，所以可以强制计算在每一处的函数极值来明确这一点。在有些情形下，MuPAD 返回的关于 S 信息可能是一系列方程，而这些方程仍然需要被解出来找出可以取到的极值的点。在这种思想下，求下面的各题的极值。注意矩阵中的方程及其限制域，第一行是函数，而下面的是限制域。

1. $x^3 - y^2$
 $x + y = 0$
 $\sqrt{x^2 + y^2} - z$
2. $x^2 + y^2 = 16$
 $x + y + z = 10$
 $x^2 + y^2 + z^2$
3. $3x + 2y + z = 6$
 $x + y + z = 1$

在没有限制域的情况下，也可以求最大最小值。这种情形，只要把光标放在表达式内，

选择求极值 (Find Extrema) 命令就可以了. 用求极值 (Find Extrema) 命令求 $f(x) = \cos x + \sin 3x$ 的极值. 当然, 如果在 x 点有极值的话, 那么在 $x + 2\pi$ 处有一极值. 试求 $f(x) = \cos x + \sin 3x$ 的极值. 虽然结果很多, 只有一个临界点. 试比较这个临界点和 $\cos x + \sin 3x$ 给出的临界点的异同.

8.13.4 积分方法

Scientific WorkPlace 甚至能直接计算许多积分, 包括分部积分, 复合积分, 局部积分. 用下面的公式进行分部积分

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

分部积分 $\int x \ln x dx$ 的操作是: 用菜单项微积分 (Calculus) 下的分步积分 (Integrate by Parts) 命令, 对话框中输入 $\ln x$ 作为被积函数, 也就是上面公式中的 u , 然后单击确定 (OK), 得到的是 $\frac{1}{2}(\ln x)x^2 - \int \frac{1}{2}x dx$. 这里有些例子用于练习.

1. $\int \ln x dx$
2. $\int x^2 \ln x dx$
3. $\int x \cos x dx$
4. $\int x^2 e^x dx$
5. $\int e^x \cos x dx$

公式形式的改变, 比如 $u = g(x)$, 则 $du = g'(x)dx$, 那么

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

计算 $\int x \sin x^2 dx$: 把光标放在表达式内, 选择菜单项微积分 (Calculus) 下的变量代换 (Change Variable) 命令, 并在对话框中输入 $u = x^2$ 然后选择确定 (OK), 会得到 $\int \frac{1}{2} \sin u du$, 它看上去就是可积的. 试用上述操作:

1. $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$
2. $\int \frac{dx}{1+4x^2}$
3. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$
4. $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$

局部积分法适用于乘积形式的函数, 这些函数可以写成简单的函数和. 使用局部积分法求 $\frac{3x^2+2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}$ 的积分: 按住 CTRL 键, 选择菜单项微积分 (Calculus) 下的部分分式 (Partial Fractions) 命令, 会得到 $\int \left(\frac{9}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2} \frac{-2+x}{x^2+1} \right) dx$, 而 $\int$, 括号以及 dx 都被加了进来. 现在可以对每个部分进行积分. 当然, MuPAD 可以直接计算 $\int \frac{3x^2+2x+4}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$. 练习下列各题:

1. $\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-2)} dx$
2. $\int \left(2x + \frac{9x-3}{x^2-2x-5} \right) dx$
3. $\int \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^2+7} \right) dx$

8.13.5 黎曼和的图形表示

菜单项微积分 (Calculus) 下的绘制近似积分图形 (Plot Approx. Integral) 及绘制近似积分动画 (Plot Approximate Integral Animated) 选项可以图形化地表示黎曼和

曲线的大致区域及动画表示. 可以作出通过子区间中点 (midpoints)、左端点 (left endpoints) 或右端点 (right endpoints) 得到黎曼和图形. 由中点 (midpoints) 决定的黎曼和是指由子区间中点 (midpoints of subintervals) 设定宽度的矩形区域; 相似地, 左边由左端点 (left endpoints) 设定, 右边由右端点 (right endpoints) 设定. 默认设定下中点 (midpoints) 和图形框宽为10. 但是可以通过修改图形来改变左端点 (left endpoints)、右端点 (right endpoints) 二者之一, 或者二者都改变. 作出 $x \sin x$ 的图形: 把光标放在表达式内, 应用绘制近似积分图形 (Plot Approx. Integral) 命令. 作出图来, 重新设置 x 的范围和图形框大小. 输入 $x + \sin xt$, 应用绘制近似积分动画 (Plot Approximate Integral Animated) 试验.

8.13.6 近似求积方法

Scientific WorkPlace 支持中点 (midpoints) 方法, trapezoidal 法则以及 Simpson's 法则用于计算近似积分. 光标放在 $x \sin x$ 内, 从菜单项微积分 (Calculus) 中选择近似积分 (Approximate Integral), 并在对话框中选择适当的方法. 会得到一个数值以计算出近似积分表达式. 使用三种不同的积分方法, 将 $[0, \pi]$ 分成 10 个子区间, 计算 $\int_0^\pi x \sin x dx$, 并对比四个结果.

8.14 常微分方程

运算 (Compute) 菜单下的解常微分方程 (Solve ODE) 菜单项用于求解的四种方法分别是: 精确解 (Exact)、拉普拉氏变换 (Laplace)、数值解 (Numeric) 以及级数 (Series). 把光标放在方程或者方程组内, 选择上述方法之一. 如果变量不明确, 会有一个对话框出现要求你指定变量.

8.14.1 精确求解

使用解常微分方程 + 精确解 (Solve ODE + Exact)、解常微分方程 + 拉普拉氏变换 (Solve ODE + Laplace) 及解常微分方程 + 级数 (Solve ODE + Series) 解下列各题:

1. $y' = \sin x$
2. $y' = \sin x + t$
3. $y' = y + x$
4. $y' = y + e^{ax}$
5. $D_x y = \sin x + \cos x$
6. $D_x y = \sin x + \cos x + t$
7. $y' = y + \sin x$ 在同一坐标轴上, 作出三种解的图象, 常数为 C_1, C_2, C_3 , 有 1, 2, 3 表示三条曲线.
8. $y'' + y = x^2$

下面是方程组的情况. 它们以 $n \times 1$ 阶的形式输入, 或者以独立显示状态输入. 把光标放在矩阵内, 选择精确解 (Exact)、拉普拉氏变换 (Laplace)、级数 (Series) 中的一种求解:

1. 这是 2×1 阶的矩阵:

$$\begin{matrix} D_x y - z = 1 \\ D_x z + y = 1 \end{matrix}$$

2. 这里是独立显示状态，用ENTER键可以增加方程.

$$\begin{aligned}y' &= x \\x' &= -y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \quad y' &= x \\x' &= y \\x' &= x + y - z \\4. \quad y' &= -x + y + z \\z' &= -x - y + z\end{aligned}$$

8.14.2 问题的初始条件

这里有些初始条件的方程组：可微方程组，它的初始条件用 $n \times 1$ 阶矩阵给出。通过其它方法可以解出来。解会出现在第一个方程的下面。它表明函数已经被定义。这个函数会出现在定义列表中，表示为 y , MuPAD 数值处理数 n (MuPAD numerical process Number n)，这里 n 表示第 n 个被定义的函数。这些函数可以被用于计算和作图。作出这些数值函数图象的方法是：用二维绘画 + 常微分方程 (Plot 2D + ODE) 下的直角坐标 (Rectangular) 命令,但是绘图速度显得有点慢。试比较数值解的图象和准确图象。用各种方法解方程组，并对比他们的图象及其对应的数值解的图象。当然，要做这些，必须先去掉 O 估计项。

$$\begin{aligned}1. \quad y' &= \sin x \\y(0) &= 1 \\2. \quad y' &= 2y \\y(0) &= 2 \\y'' &= 2y \\3. \quad y(0) &= 2 \\y'(0) &= 1 \\4. \quad D_x y + 2y &= e^{2x} \\y(0) &= 1 \\5. \quad \frac{dy}{dx} + y &= e^{2x} \\y(0) &= 0 \\6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{xx}y - y &= 0 \\y(0) &= 1 \\y'(0) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_x y - z &= 1 \\7. \quad D_x z + y &= 1 \quad \text{对于象这样的两个方程的情况,一样可以作出相平面.} \\y(0) &= 0 \\z(0) &= 0\end{aligned}$$

解出方程组会产生定义的函数。精确解会产生方程组,但是没有定义函数。选择方程,使用定义 (Definitions) 下的新定义 (New Definition) 命令把解定义为函数。

例如，对下面的方程组应用解常微分方程 + 精确解 (Solve ODE + Exact)

$$D_{xx}y - y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

会得到精确解是：

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

选择 $y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ 并使用定义 (Definitions) 下的新定义 (New Definition) 命令。这样 y 被定义为一个可以计算和作图的函数。方程的解是两个函数 y, z ，把光标放在 y, z 内，选择二维绘图 (Plot 2D) 下的相平面 (Phase Plane) 命令作图。对这个方程使用上述操作。

1. 通过解常微分方程 (Solve ODE) 下的精确解 (Exact) 命令得到的精确解是关于 x 的两个表达式，其中 x 被看成参数，而二维图象给出的是相平面。试试它。

$$y' = x$$

2. $x' = -y$

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y' = x$$

3. $x' = y$

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$x' = x + y - z$$

$$y' = -x + y + z$$

4. $z' = -x - y + z$

$$x(0) = 1$$

$$y(0) = 1$$

$$z(0) = 1$$

上标中含有变量是允许的，这里有些例子：

5. $D_{xx}y_1 + y_1 = e^{2x}$

$$y_1(0) = 1$$

$$D_{xx}y_1 - y_1 = 0$$

6. $y_1(0) = 1$

$$y_1'(0) = 0$$

这里有两个非线性方程组。拉普拉氏 (Laplace) 命令对它们无效，就如拉普拉氏变换 (Laplace Transforms) 命令只是适用于线性方程组一样。第二个例子没有级数解，因为 $\ln x$ 关于 $x = 0$ 的幂次没有级数方程。

1. $y' = y^2 + 4$

$$y(0) = -2$$

2. $(x+1)y' + y = \ln x$

$$y(1) = 10$$

8.15 向量计算

向量被用几种形式给出，如 $1 \times n$ 阶矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ，或者 $n \times 1$ 阶矩阵 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ，或者 $[3, 2, 1]$ ， $(2, -1, 0)$ 。

8.15.1 点积和叉积

下面是点积和叉积的例子，首先定义 $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ， $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ， $c = [3, 2, 1]$ ，以及 $d = (2, -1, 0)$ ：

1. $(1, 2, 3) \times (3, 2, 1)$
2. $a \times c$
3. $(1, 2, 3) \cdot (3, 2, 1)$
4. $a \cdot c$
5. $(1, 2, 3) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times (3, 2, 1)$
6. $(1, 2, 3) \times b \times (3, 2, 1)$
7. $a \times b \times c$
8. $(1, 2, 3) \times (3, 2, 1) \times (1, 0, 1)$
9. $a \times c \times (1, 0, 1)$
10. $(1, 2, 3) \times (3, 2, 1) \cdot (1, 0, 1)$

最后一个例子被正确计算出来，即使这三个积没有联系，因为计算在默认状态下是从左至右进行的。如果点积被先算，叉积其次运算，那么会得到错误的结果：

$$(1, 0, 1) \cdot (1, 2, 3) \times (3, 2, 1) = 4 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

用括号可以正确计算：

$$(1, 0, 1) \cdot ((1, 2, 3) \times (3, 2, 1)) = -8.$$

8.15.2 向量正规化

向量正规化被补充用于每个正整数 n ，通常的定义是： $\|c\|_n = (\sum |c_i|^n)^{1/n}$ 。对向量 $c = [3, 2, 1]$ ，有 $\|c\|_1 = 6$ ， $\|c\|_2 = \sqrt{14} = 3.7417$ ， $\|c\|_6 = \sqrt[6]{794} = 3.043$ ， $\|c\|_\infty = 3$ 。默认的 $\|c\|$ 是 2-正规化。也许你想证实上面的结果，那么把光标放在等号的左边，然后按下 **CTRL+ E** 键。正规化可直接用于 n -元组 (n -tuples) 代表向量： $\|(1, 2, 3, 4)\| = \sqrt{30}$ 。正规化的双竖线符号可以在括号菜单中找到。菜单上的“||”在图标  的下面，或者按住 **CTRL** 的同时输入 **Vert**。

8.15.3 梯度、散度和卷积

梯度、散度和卷积在菜单项向量计算 (Vector Calculus) 下过于冗长，所以把他们简记为“ ∇ ”，“ $\nabla \cdot$ ”，“ $\nabla \times$ ”用于计算。散度和卷积操作作用于三维向量域，向量域变量是有序的函

数列. 默认的域变量按顺序 x, y 和 z , 但它们可以在菜单项向量计算 (Vector Calculus) 下的建立基本变量 (Set Basis Variables) 中进行设置. 下面是使用了默认变量设置的例子, 先作如下定义:

1. $F = [yz, 2xz, xy]$
2. $G = (xz, 2yz, z^2)$
3. $H = [yz \quad 2xz \quad xy]$
4. $f = xyz$

计算下面各式:

5. $\nabla \times F$
6. $\nabla \times G$
7. $\nabla \times H$
8. $\nabla \cdot F$
9. $\nabla \cdot G$
10. $\nabla \cdot H$
11. ∇f
12. $\nabla \times (yz, 2xz, xy)$
13. $\nabla \cdot (xz, 2yz, z^2)$
14. $\nabla (xyz)$

由于梯度通常被看作 n 个任意变量的比例函数计算, 函数中出现的所有变量被准确地补充为梯度, 并且假设这些变量被有序地排列. 这种情况下, 看上去比设置基本变量、普通列表以及调出需要变量列表的对话框要方便些. 下面的例子可以说明这些:

1. $\nabla (cuv + v^2w) = (uv, cv, cu + 2vw, v^2)$
2. $\nabla xy = (y, x)$

在第一个例子中, 习惯于把 c 看成参数, 并希望得到如下答案 $(cv, cu + 2vw, v^2)$; 而在第二个例子中, 它被看成是三维的, 希望得到如下答案 $(y, x, 0)$.

菜单项向量计算 (Vector Calculus) 下的标势 (Scalar Potential) 命令梯度的转换, 它找出给定的向量域的梯度比例函数, 或者提示要找的函数不存在. 下面是含有普通变量的隐含梯度的例子:

1. (x, y, z) , 隐含梯度是 $\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$
2. (x, z, y) , 隐含梯度是 $yz + \frac{1}{2}x^2$
3. (y, z, x) , 隐含梯度不存在

在下面的例子中, 进行计算, 并使用标势 (Scalar Potential) 命令(由于向量域是一个梯度, 它有初始函数作为隐含梯度):

$$\nabla (xy^2 + yz^3)$$

前面我们知道, 使用者希望 $ucv + v^2w$ 是向量域 $(cv, cu + 2vw, v^2)$ 的隐含梯度. 我们确实得到这个结果, 因为我们发现不同的变量数多于向量的元素个数, 一个对话框弹出要求指定域变量, 这时输入“ u, v, w ”. 这个对话框在我们求 $(y, x, 0)$ 的隐含梯度时也会出现.

8.15.4 海赛矩阵

海赛矩阵是由含有若干个变量的标量表达式派生出来的对称矩阵. 变量顺序决定海赛矩阵的行和列的排列顺序, 它按对称排列. 容易出现问题的是: 当变量列表中含有你认为是常数的变量, 比如 $cxyz$ 中的 c . 这种情况下, 你必须删掉得到的矩阵的第一行和第一列才能得到你想要的海赛矩阵. 对下面的例子应用向量计算 (Vector Calculus) 菜单项中的海

赛矩阵 (Hessian) 命令求海赛矩阵:

1. xyz
2. $x^2 + y^3$
3. uvw
4. $wxyz$

也可以定义 $f(x,y,z) = 3xy^2z$ 然后选择 $f(x,y,z)$, 并使用海赛矩阵 (Hessian) 命令求其海赛矩阵.

8.15.5 雅可比矩阵

雅可比矩阵是由向量域派生出来的矩阵. 雅可比矩阵类似于海赛矩阵, 变量列表顺序决定雅可比矩阵的行和列的排列顺序, 它的对称排列顺序通常是正确的. 变量的个数要和向量元素个数相同; 如果个数不相同, 或者变量列表中含有参数, 或者向量中不含有变量列表中的变量, 那么, 会有一个对话框弹出要求指定变量列表. 练习下面的例子(每个例子中的变量列表都是“ x,y,z ”):

1. (yz, xz, xy)
2. $(x^2z, x+z, xz^2)$, 不含 y
3. $(x^2z, y+c, yz^2)$, 增加了一个 c

8.15.6 卷积和向量位势

现在要做的是, 把这些运算用于含有三个变量的梯度函数或者向量函数. 这些变量一般默认为“ x,y,z ”, 但是你也可以用向量计算 (Vector Calculus) 菜单项下的建立基本变量 (Set Basis Variables) 选项来设定变量. 这要比在运算时填对话框要方便些. 比如

$$\nabla \times (xy, yz, zx) = (-y, -z, -x). \text{ 向量位势是 } (-\frac{1}{2}z^2 + xy, yz, 0)$$

注意, 当想得到卷积的向量位势时, 得到的并不是开始的那个向量, 这是因为向量位势只由卷积为零的向量决定. 下面有个例子可以说明这一点:

$$\nabla \times (\frac{1}{2}z^2, 0, zx) = (0, 0, 0)$$

把变量改为 u, v, w 在进行同样的运算:

$$\nabla \times (uv, vw, uw) = (-v, -w, -u), \text{ 向量位势是 } (-\frac{1}{2}w^2 + uv, vw, 0)$$

向量可以写成 (v, w, u) , 就和写成列矩阵一样. 对 (v, w, u) 试用向量势 (Vector Potential) 命令.

8.15.7 散度

散度是由 i^{th} 变量对应的向量的元素所派生出来的和. 这里散度仅求三维散度, 这是由含有变量的个数决定的.

$$\nabla \cdot (xy, yz, zx) = y + z + x$$

8.16 统计

Scientific WorkPlace 支持大量的统计的分布函数和密度: 从不同的分布中寻找随机样本的功能. 也可处理数据方面的统计问题.

统计 (Statistics) 菜单项中的选项有: 平均值 (Mean)、中位数 (Median)、众数 (Mode)、矩 (Moment)、分位数 (Quantile)、标准差 (Standard Deviation)、方差

(Variance)，可以用来处理数据或矩阵统计问题。运算结果是一个数字，或者是各列都是数据的矩阵。

统计 (Statistics) 菜单项中的选项相关系数 (Correlation)、协方差 (Covariance) 以及曲线拟合 (Fit Curve to Data) 的运算对象必须是矩阵。对于曲线拟合 (Fit Curve to Data) 命令来说，矩阵的列必须是变量名称。调用统计 (Statistics) 菜单项中的选项随机数 (Random Numbers) 命令，会有一个含有分布函数族列表的对话框出现，你可以从中得到随机样本。

8.16.1 表和矩阵

Scientific WorkPlace 会储存列表或矩阵中的数据，列表中的数字会用逗号隔开排列，而数字和逗号都是数学模式。矩阵 (Matrices) 下的重组 (Reshape) 命令可以用列表中的数据改为矩阵中的数据。

包含用逗号隔开的数字列表或者一个列向量的 ASCII 的文件可以导入到 *Scientific WorkPlace* 文档中，这个文件名称须是：文件名.txt。在文件 (File) 菜单中，选择输入内容 (Import Contents) 来导入 ASCII 过滤码，并输入包含列表的文件名称。按需要在数字间添加逗号，并选择整个列表把它转化为数学模式。然后，你可以象处理列表一样处理其中数据，或者用矩阵 (Matrices) 下的重组 (Reshape) 命令把数据列表改为矩阵形式。

8.16.2 平均值、中位数、众数、矩、分位数、平均偏差、标准差、方差

统计 (Statistics) 菜单项中的这些选项，只能处理列表、矩阵以及形式矩阵。形式矩阵指的是矩阵的第一行和第一列不都是数字。在这种情况下，第一行是变量名称。在处理回归矩阵时，需要用到这样的矩阵。其它计算也可以用标签矩阵，但是这时忽略矩阵的第一行。比如：

1. 求 23, 5, -6, 18, 23, -22, 5 的平均值和中位数等：把光标放在数据列表中，从统计 (Statistics) 菜单项中选择各个命令。

2. 注意平均值 (Mean) 和方差 (Variance) 命令的另一面。方差 (Variance) 计算的是样本的方差。也就是说 $n-1$ 被用作除数，而不是 n 用作除数。

数据中位数指的是有一半的数据小于等于中位数，或者有一半的数据大于等于中位数。如果有两个数字满足上面的标准，那么它们的平均值就是中位数。

p ($0 \leq p \leq 1$) 分位，是指 q_p 满足分数 p 小于 q_p ，而分数 $1-p$ 大于 q_p 。0.5 是分位中位数，或者说是 0.50；而 0.25 分位是第一分位或者说是 0.25，等等。 p 分位并不唯一，对于特殊的分位，MuPAD 返回的信息有点奇怪。

把上面的数据输入为一个 7×1 阶的矩阵，然后做同样的计算。

3. 对矩阵 $\begin{bmatrix} 23 & 5 & -6 \\ 18 & 23 & -22 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 形式的数据作上述计算。

4. 对矩阵 $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ 形式的数据作上述计算。

5. 对矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ f & g \end{bmatrix}$ 形式的数据作上述计算. 中位数 (Median) 和分位数 (Quantile) 命令在这里不起作用.

8.16.3 相关和协方差

这里有两个对 $m \times n$ 阶矩阵的运算, 得到的是 $n \times n$ 阶矩阵. 练习:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 43 & -62 \\ 77 & 66 \\ 54 & -5 \\ 99 & -61 \end{pmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} -50 & -12 \\ 31 & -26 \\ 1 & -47 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ -50 & -12 & -18 \\ 31 & -26 & -62 \\ 1 & -47 & -91 \end{bmatrix}$

8.16.4 随机数

Scientific WorkPlace 中的随机数发生器会从以下几类函数中给出随机样本: Beta, Binomial, Cauchy, Chi-Square, Exponential, F, Gamma, Hyper-geometric, Normal, Poisson, Student's T, Uniform 以及 Weibull. 从统计 (Statistics) 菜单项中, 选择随机数 (Random Numbers), 然后从弹出的对话框中选择类别(含有适当的参数)以及样本的大小. 随机样本以列表形式出现在后面. 试验上述操作.

8.16.5 分布和密度

Scientific WorkPlace 包括: Normal, Student's T, Chi-square, F, Exponential, Weibull, Gamma, Beta, Uniform, Binomial, Poisson 以及 Hypergeometric. 下面给出的列表列有类别名, *Scientific WorkPlace* 用于累积分布函数的名称, 各个函数使用的参数(df指自由度). 其中累积分布函数被称为 FunctionDist, 密度函数为 FunctionDen, 累积函数的逆为 FunctionInv.

Normal	NormalDist(x; mean, std dev)
Student's T	TDist(x; df)
Chi-Square	ChiSquareDist(x; df)
Exponential	ExponentialDist(x; mean)
F	FDist(x; num df, den df)
Weibull	WeibullDist(x; shape, scale)
Gamma	GammaDist(x; shape, scale)
Cauchy	CauchyDist(x; median, something)
Beta	BetaDist(x; first shape, second shape)
Uniform	UniformDist(x; left end, right end)
Binomial	BinomialDist(x; tries, prob of success)
Hypergeometric	HypergeomDist(x; pop, successes, tries)
Poisson	PoissonDist(x; mean)

在数学模式下输入，*Scientific WorkPlace*会识别这些函数名，当你输完函数名的最后一个字母时它们会变为灰色。这些名字中有的比较长，所以也可以使用工具（Tools）菜单下的自动替换（Automatic Substitution）命令，这样可以省去一些键盘操作；或者，你想指定其它名称，比如：用 n 表示正态密度，平均值2以及方差4，作定义 $n(x) = \text{NormalDen}(x; 2, 4)$ 。实际上，分号可以用逗号代替来分隔自变量和参数。例如，你可以定义 $f(x, y, z) = \text{UniformDen}(x, y, z)$ 。试做下面的练习：

1. 如果正态分布中不含有参数，则认为是标准正态分布，也就是说平均值是0，标准差是1。在2.44处计算标准正态分布函数的值，结果是0.99266。作出这个正态分布函数的图象。观察0.99266是否正好在图象中？
2. 计算（Evaluate） $\int_{-\infty}^0 \text{NormalDen}(x) dx$ 和 $\text{NormalDist}(0)$ 。
3. 计算（Evaluate） $\int_{-\infty}^{\infty} x \text{NormalDen}(x; 4, 1) dx$ 。
4. 计算（Evaluate） $\int_{-\infty}^{\infty} (x - 4)^2 \text{NormalDen}(x; 4, 1) dx$ 。
5. 在同一坐标轴中作出平均值和方差分别是(0, 1), (0, 5), (0, 0.5), (1, 1)的正态密度函数的图象。在另一坐标轴中，作出平均值和方差分别是(0, 1), (0, 5), (0, 0.5), (1, 1)的正态分布函数。
6. 在63.66处计算自由度为1的t分布函数；并在前面计算结果处计算自由度为1的t分布函数的逆。在-0.97847处计算自由度为3的t分布函数；并在前面计算结果处计算自由度为3的t分布函数的逆。
7. 计算 $\text{TDist}(6; 5) + \text{TDist}(-6; 5)$ ，解释这题的目的。
8. 计算（Evaluate） $\int_{-\infty}^0 \text{TDen}(x; 5) dx$ 和 $\text{TDist}(0; 5)$ 。
9. 计算（Evaluate） $\int_{-\infty}^{\infty} x \text{TDen}(x; 5) dx$ 。
10. 在同一坐标中作出自由度为1和15的t分布密度函数的图象。在同一坐标中作出自由度为1和15的t分布函数的图象。
11. 在0.1处计算参数是3和5的F分布函数的值，并在前面计算结果处计算含有相同参数的F分布函数的逆。
12. 计算（Evaluate） $\int_0^1 \text{FDen}(x; 3, 5) dx$ 。
13. 计算（Evaluate） $\int_0^{\infty} x \text{FDen}(x, 3, 5) dx$ 。
14. 在同一坐标系中的区间[0, 10]上作出参数分别是 $(n, m) = (1, 1), (2, 5), (3, 15)$ 的F分布函数的图象。并在另一坐标轴中，作出以上F分布函数对应的密度函数的图象。
15. 计算（Evaluate） $\int_0^2 \text{ExponentialDen}(x, 3) dx$ 和 $\text{ExponentialDist}(2; 3)$ 。
16. 计算（Evaluate） $\int_0^{\infty} x \text{ExponentialDen}(x, 3) dx$ 和 $\int_0^{\infty} (x - 3)^2 \text{ExponentialDen}(x; 3) dx$ 。
17. 定义 $E(x, y) = \text{ExponentialDen}(x; y)$, $E\text{Inv}(x; y) = \text{ExponentialInv}(x; y)$ 。在同一坐标轴中

作出 $E(x, 1)$, $E(x, 3)$, $E(x, 5)$ 以及函数 $EInv$ 的图象. 计算 $EInv(E(x, 3), 3)$ 和 $E(EInv(x, 3), 3)$.

18. 计算 (Evaluate) $WeibullDist(0.73; 0.5, 0.3)$ 和 $WeibullInv(0.5143; 0.5, 0.3)$.
19. 计算 (Evaluate) $\int_0^\infty x WeibullDen(x; 0.5, 3) dx$.
20. 分别在两个坐标中同时作出含有参数 $(0.5, 1)$, $(1, 1)$, 和 $(2, 1)$ 的 Weibull 型分布函数的累积分布和密度的图象.
21. 计算 (Evaluate) $\int_0^\infty x GammaDen(x; 2, 3) dx$.
22. 计算 (Evaluate) $\int_0^\infty (x-6)^2 GammaDen(x; 2, 3) dx$.
23. 分别在两个坐标中同时作出含有参数 $(1, 0.5)$, $(1, 1)$, 和 $(2, 1)$ 的 Gamma 型分布函数的累积分布和密度的图象.
24. 计算 (Evaluate) $BetaDist(0.5; 2, 3)$ 和 $\int_0^5 BetaDen(0.5; 2, 3) dx$.
25. 分别在两个坐标中同时作出含有参数 $(2, 3)$, $(5, 1)$, 和 $(3, 8)$ 的 Beta 型分布函数的累积分布和密度的图象.
26. 计算 (Evaluate) $CauchyDist(0; 0, 1)$ 和 $\int_{-\infty}^0 CauchyDen(x; 0, 1) dx$.
27. 分别在两个坐标中同时作出含有参数 $(-3, 1)$, $(0, 1.5)$, 和 $(3, 1)$ 的 Cauchy 型分布函数的累积分布和密度的图象.
28. 计算 (Evaluate) $UniformDist(5; 0, 10)$ 和 $\int_0^5 UniformDen(x; 0, 10) dx$.
29. 计算 (Evaluate) $\int_{-1}^1 x UniformDist(x; -1, 1) dx$ 和 $\int_0^4 (x-2)^2 UniformDen(x; 0, 4) dx$.
30. 分别在两个坐标中同时作出含有参数 $(0, 1)$, $(0, 2)$, 和 $(0, 3)$ 的 Uniform 型分布函数的累积分布和密度的图象.
31. 计算 (Evaluate) $BinomialDist(4; 10, 0.5)$ 和 $\sum_{i=0}^4 BinomialDen(i; 10, 0.5)$.
32. 计算 (Evaluate) $\sum_{i=0}^{10} i BinomialDen(i; 10, 0.4)$ 和 $\sum_{i=0}^{10} (i-4)^2 BinomialDen(i; 10, 0.4)$.
33. 计算 (Evaluate) $PoissonDist(4; 5)$ 和 $\sum_{i=0}^4 PoissonDen(i; 5)$.
34. 计算 (Evaluate) $\sum_{i=0}^\infty i PoissonDen(i; 10)$ 和 $\sum_{i=0}^\infty (i-10)^2 PoissonDen(i; 10)$.
35. 计算 (Evaluate) $HypergeomDist(50; 100, 25, 80)$ 和 $\sum_{i=0}^{50} HypergeomDen(i; 100, 25, 80)$.
36. 计算 (Evaluate) $\sum_{i=0}^{25} i HypergeomDen(i; 100, 25, 80)$ 和 $\sum_{i=0}^{25} (i-20)^2 HypergeomDen(i; 100, 25, 80)$.

8.16.6 曲线拟合

使用 *Scientific WorkPlace*, 可以方便地作出符合直观的常用曲线拟合. 调用统计 (Statistics) 菜单项中的曲线拟合 (Fit Curve to Data) 命令, 并在对话框中选择:

- 直线拟合, 使用多变量回归 (非常数) (MultiRegress or MultiRegress (no const)) 命令
- 多变量回归 (MultiRegress) 计算写成矩阵形式的线性回归方程
- 多项式拟合最好使用多项式次数 (Polynomial of Degree) 命令

结果是一个方程, 它是第一列以及后面一些列是变量的线性组合, 并加上一个常数 (如果选择多变量回归 (非常数) (MultiRegress(no const)) 命令则是错的). 产生的方程满足最小二乘法是最佳的数据拟合. 练习下面的例子, 并作出结果方程的图象:

$$1. \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1.1 \\ .5 & 1.5 \\ 1 & 1.9 \\ 1.5 & 2.4 \\ 2 & 2.9 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} z & x & y \\ 1 & 0 & 1.1 \\ 2 & .5 & 1.1 \\ 4 & 1 & 1.9 \\ 5 & 1.5 & 1.9 \\ 7 & 2 & 2.9 \end{pmatrix}$$
 多项式拟合在这里没有意义,但是你可以选择相邻的两列,然后把第一列和第二列拟合.
3.
$$\begin{matrix} y & x \\ a & b \\ c & d \end{matrix}$$

8.16.7 练习

以下是关于上面讨论分布的练习,它们或多或少地使用了统计语言. 答案在后面.

1. 对于一个平均值为50、标准差为50的正态随机变量, 以及一个样本数为80的样本, 可以计算样本的平均值 $\bar{X}$. 那么 $\bar{X}$ 小于46的概率是多少?
2. 假设一个正在使用的小器具随时间磨损很慢, 也就是说, 这个器具在相同的时间内使用失败的概率是相同的. 因此, 失败的时间满足指数分布 $P(T \leq t)$ 的形式 $1 - e^{-\frac{t}{\mu}}$. 假设该器具的平均使用寿命是5年, 那么求该器具使用寿命延长到7.5年的概率. 如果该器具保证使用期是2年, 那么在有效使用期内需要更换的部分占百分之几?
3. 一个器具的平均使用寿命是5年, 标准差是2年. 假设满足正态分布, 那么求该器具使用寿命延长到7.5年的概率. 如果该器具保证使用期是2年, 那么在有效使用期内需要更换的部分占百分之几?
4. 一个连续的分布函数的平均值是概率密度函数 $f(u)$ 以及变量的乘积形式的积分: $\int_{-\infty}^{\infty} uf(u)du = \mu$, 方差是 $\int_{-\infty}^{\infty} (u - \mu)^2 f(u)du$. 求本章中讨论的各个连续分布的平均值和方差.
5. 一个概率密度函数 $f(u)$ 的不连续分布平均值是 $\sum_{-\infty}^{\infty} uf(u) = \mu$, 方差是 $\sum_{-\infty}^{\infty} (u - \mu)^2 f(u) = \sigma^2$.
 - a 求本章中讨论过的不连续分布的平均值和方差.
 - b 如果分布的概率密度函数是 $f(n) = (\frac{1}{2})^n$, 那么求分布的平均值和方差.
6. 掷骰子直到掷出4点, 那么求至少掷5次才会出现4点的概率.
7. 一台电话接线总机在高峰时间内平均处理600个电话, 它一分钟内最多能处理20个电话连接. 使用Poisson分布计算总机在假设的一分钟内超负荷的概率是多少?
8. 对平均值是1, 标准差是1的正态分布, 求 $X^2 \leq 4$ 的概率.

8.16.8 解答

1. 要解决这个问题, 需从平均值为 μ 以及标准差为 σ 的正态分布中知道 n 个样本的平均分布和平均值 μ 及标准差 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 是正态的, 那么概率是

$$\Pr(\bar{X} \leq 46) = \text{Normal}\left(46; 50, \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = .00017$$

2. $\text{Exponential}(7.5; 5) = .78 = P(X \leq 7.5)$, 所以大于7.5的概率 X 是 $1 - 0.78 = 0.22$; $\text{Exponential}(2; 5) = 0.33 = P(X \leq 2)$, 所以第二个问题的答案是大约0.33.
3. $\text{Normal}(7.5; 5, 2) = .894 = P(X \leq 7.5)$, 大于7.5的概率 X 是 $1 - 0.894 = 0.106$, 或者是0.106. $\text{Normal}(2; 5, 2) = .067 = P(X \leq 2)$, 所以第二个问题的答案是大约 0.7.

4. 对正态分布: 计算得到 $\int_{-\infty}^{\infty} \text{NormalDen}(u; \mu, \sigma) u du = \mu$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} \text{NormalDen}(u; \mu, \sigma) (u - \mu)^2 du = \sigma^2$.
 对自由度为5的t分布, 计算得平均值是 $\int_{-\infty}^{\infty} u \text{TDen}(u; 5) du = 0$,
 而方差是 $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \text{TDen}(u; 5) du = \frac{25}{3} \sqrt{5}$.
 (当参数是符号形式的时, 求平均值和偏差时会有点问题, 可以通过指定数字参数来解决)
5. 对binomial分布, 化简后计算得平均值:

$$\sum_{x=1}^{\infty} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = pn$$

化简及因式分解后计算方差:

$$\sum_{x=0}^n (x - pn)^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (1-p)pn$$

(偏差的直接表达式是复杂的, 这里没有显示. 注意上面使用的符号 $\binom{n}{x}$ 是二项式系数, 而不是矩阵. 从插入 (Insert) 菜单上选择组合数 (Binomial), 然后选择 None for Line 命令即可.)

6. 如果分布的概率密度函数是 $f(n) = (\frac{1}{2})^n$, 其中 $n \geq 0$, 那么分布的平均值是 $\sum_{n=1}^{\infty} n (\frac{1}{2})^n = 2$, 方差是 $\sum_{n=1}^{\infty} (n-2)^2 (\frac{1}{2})^n = 2$.
7. 掷一次得到4点的概率是 $\frac{1}{6}$, 所以得到其它结果的概率是 $\frac{5}{6}$, 掷5次得不到4点的概率是 $(\frac{5}{6})^5 = 0.40188$.
8. 在高峰时期平均有600个电话, 那么每分钟有10个电话. 在假设的一分钟内连接的电话数小于或等于20的概率是 $\sum_{k=0}^{20} \text{PoissonDen}(k, 10) = \sum_{k=0}^{20} \frac{10^k e^{-10}}{k!} = 0.99841$; 因此超负荷的概率是 $1 - 0.99841 = 0.00159$. $X^2 \leq 4$ ($-2 \leq X \leq 2$), 所以

$$\begin{aligned} \Pr(X^2 \leq 4) &= \Pr(X \leq 2) - \Pr(X \leq -2) \\ &= \text{Normal}(2, 1, 1) - \text{Normal}(-2, 1, 1) \\ &= .84 \end{aligned}$$

8.17 单形

单形的基本用途是用于求有线性 (不等式形式) 限制条件的线性方程的最大值. 在下面的例子中, 函数 $f(x, y) = x + y$ 被两个给定的不等式限制. 函数 $f(x, y)$ 为目标函数, 而若干个限制条件称为线性系. 这种线性规划问题被写成一个 3×1 阶的矩阵, 第一行是要求最大值的函数, 线性限制条件写在下面的行里. 然后单击矩阵, 并选择单形 + 最大的 (Simplex + Maximize) 命令就可以求最大值. 这样求出的最大值是 $(\frac{12}{7}, \frac{2}{7})$.

$$\begin{cases} x + y \\ 4x + 3y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 4 \end{cases}$$

当然, 这也就是求了 $-x - y$ 最小值. 试计算如下的规划问题:

$$\begin{cases} -x - y \\ 4x + 3y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 4 \end{cases}$$

求其目标函数的最小值，二者的结果是一样的。单击矩阵，并选择单形 + 最小的 (Simplex + Minimize) 可求出这个目标函数的最小值。现在求下面目标函数的最小值：

$$\begin{cases} x+y \\ 4x+3y \leq 6 \\ 3x+4y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

有两种因素会阻止求解：可能 x 和 y 没有值满足限制条件；即使有，也可能目标函数没有最大值。如果 x 和 y 有值满足限制条件，不等式组是可行的。下面是一组不等式形式的线性限制条件，我们可能会问它是否是可行的以及限制条件的标准形式是什么样。对于第一个问题，单击矩阵并选择单形 + 可行的? (Simplex + Feasible?) 可以解决；对于第二个问题，单击矩阵并选择单形 + 使标准化 (Simplex + Standardize) 可以解决。对下面的不等式组应用上述操作：

$$\begin{cases} 4x+3y \leq 6 \\ 3x+4y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

当然不等式组

$$\begin{cases} 4x+3y \leq 6 \\ 4x+3y \geq 7 \end{cases}$$

不是可行的，并且对于下面的题目目标函数没有最小值：

$$\begin{cases} x+y \\ 4x+3y \leq 6 \\ 3x+4y \leq 4 \end{cases}$$

在单形 (Simplex) 菜单项中的选项是对偶的 (Dual)，它用于计算线性问题的对偶。

$$\begin{cases} x+y \\ 4x+3y \leq 6 \\ 3x+4y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ -y \leq 0 \end{cases}$$

的对偶是

$$\begin{cases} 6s_1+4s_2 \\ 1 \leq 4s_1+3s_2-s_4 \\ 1 \leq 3s_1+4s_2-s_3 \end{cases}$$

¹本文档利用科学工作平台Scientific WorkPlace V5.5配置的Xe_{La}TeX进行排版，并用计算机代数系统MuPAD V3.1.1进行相关数值计算、符号运算及绘图。



参考文献

- [1] (美) 利昂(Leon, S.J.)著, 张文博, 张丽静(译). 线性代数(原书第8版) [M], 北京: 机械工业出版社, 2010.
- [2] 同济大学数学系. 工程数学-线性代数(第六版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [3] 唐忠明, 滕冬梅. 线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [4] 陈凤娟, 滕冬梅. 线性代数同步练习册[M]. 苏州: 苏州大学出版社, 2017.

► 学数学最好的方式是做数学.



华罗庚

♠ 聪明在于学习, 天才在于积累.

♣ 学而优则用, 学而优则创.

♡ 由薄到厚, 由厚到薄.

