利用Scientific WorkPlace内置的计算机代数系统Maple学习线性代数

苏州大学数学科学学院

2019年8月3日

目录

第一章　行列式

1.1　求行列式的值

例1. （同济5版，第3页）计算三阶行列式$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解： ▶　计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -14.$$

例2. （同济5版，第12页）计算四阶行列式$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解： ▶　计算

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 40.$$

例3. （同济5版，第3页）求解方程$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

解： ▶　计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6,$$

▶　解方程 + 精确解

$x^2 - 5x + 6 = 0$, 解是: $\{x = 2\}, \{x = 3\}$

例4. （同济5版，第13页）计算行列式$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

解： ▶ 计算

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = a^4.$$

例5. （同济5版，第15页）计算行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$.

解： ▶ 计算

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & d & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (da-bc)^3.$$

1.2 用克拉默法则解线性方程组

例6. （同济5版，第22页）用克拉默法则解线性方程组：$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$

解： ▶ 解方程 + 精确解

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}, \text{解是: } \{x_4=1, x_2=-4, x_1=3, x_3=-1\}.$$

可展示常规的解题过程.

▶ 写出线性方程的增广矩阵

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}, \text{对应矩阵:} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

▶ 输入矩阵

单击 (□)或 [□]，在上述结果矩阵中选择并复制线性方程组的系数矩阵到单元格中，得到$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$,同法得到线性方程组的常数向量$\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

▶ 定义 + 新定义

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$b=\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▶ 可以如同分块矩阵中定义Maple函数substitute，替换矩阵A中的列

*SWP*中的函数$I(x,y,i,j)$,其中矩阵b替换矩阵x的第i行第j列开始的矩阵.

▶ 定义 + 新定义

$D=\det(A)$,

$d_1=\det(I(A,b,1,1))$,

$d_2=\det(I(A,b,1,2))$,

$d_3=\det(I(A,b,1,3))$,

$d_4=\det(I(A,b,1,4))$.

▶ 计算

$x_1=\frac{\det(I(A,b,1,1))}{\det(A)}=3$,

$x_2=\frac{\det(I(A,b,1,2))}{\det(A)}=-4$,

$x_3=\frac{\det(I(A,b,1,3))}{\det(A)}=-1$,

$x_4 = \frac{\det(I(A,b,1,4))}{\det(A)} = 1.$

第二章　矩阵及其运算

2.1　矩阵的线性运算

例1. 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -3 & 9 & 12 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$，求$A+B$和$4A+3B$.

解：▶　定义 + 新定义

$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -3 & 9 & 12 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$,

▶　计算

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & 14 & 10 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix},$$

$$4A+3B=\begin{pmatrix} 3 & 47 & 28 \\ -12 & 31 & -8 \end{pmatrix}.$$

2.2　矩阵的乘法

例2. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，求$AB$.

解：▶　定义 + 新定义

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

▶　计算

$$AB=\begin{pmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 9 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

例3. （同济5版，第35页）设$A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$，求$AB$和$BA$.

解： ▶ 定义 + 新定义

$A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$,

▶ 计算

$AB=\begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例4. （同济5版，第38页）证明：$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$.

解： ▶ 定义 + 新定义

$A=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$,

▶ 计算

$$A^2=\begin{pmatrix} \cos^2 t-\sin^2 t & -2\sin t\cos t \\ 2\sin t\cos t & \cos^2 t-\sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix} \left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)\cos t-2\cos t\sin^2 t & -\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)\sin t-2\cos^2 t\sin t \\ 2\cos^2 t\sin t+\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)\sin t & \left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)\cos t-2\cos t\sin^2 t \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix},$$

由此，$A^n=\begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$.

2.3 矩阵的转置

例5. （同济5版，第39页）设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求其转置矩阵$A^T$.

解： ▶ 定义 + 新定义

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

▶ 矩阵 + 转置

A, 转置: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

▶ 计算

$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

例6. （同济5版，第39页）设$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$(AB)^T$，并验证：$(AB)^T=B^TA^T$

解：▶ 定义 + 新定义

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}，B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

▶ 计算

$$(AB)^T=\begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}, B^TA^T=\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix},$$

可见 $(AB)^T=B^TA^T$.

2.4 逆矩阵

例7. （同济5版，第44页）设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求其逆矩阵$A^{-1}$，并验证$AA^{-1}=E$（单位矩阵）.

解：▶ 定义 + 新定义

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

▶ 矩阵 + 求逆，或：计算

$$A, \text{逆矩阵:} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

▶ 计算

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E, A^{-1}A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

故 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

2.5 矩阵方程

例8. （同济5版，第45页）设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$，且$AXB=C$，求矩阵$X$.

解： ▶ 定义 + 新定义

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$，

▶ 计算

$$AXB=C\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}.$$

▶ 计算

$$AXB=C\Rightarrow AX=CB^{-1}=\begin{pmatrix}-12&5\\6&-2\\4&-1\end{pmatrix},$$

▶ 解方程 + 精确解

$AX=\begin{pmatrix}-12&5\\6&-2\\4&-1\end{pmatrix}$, 解是: $\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}$.

例9. （同济5版，第65页）设$A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-2\\-1&3&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\-2&5\end{pmatrix}$，求解矩阵方程$AX=B$.

解： ▶ 定义 + 新定义

$A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-2\\-1&3&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\-2&5\end{pmatrix}$，

▶ 计算

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-4&2\\0&1\\-3&2\end{pmatrix},$$

▶ 解方程 + 精确解

$AX = B$, 解是: $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

3.1　矩阵的行最简形和标准型

例1. （同济5版，第59页）设$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$，求$B$的阶梯形和秩.

解： ▶　定义 + 新定义

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

▶　矩阵 + 高斯消元法，矩阵 + 秩

B, 高斯消元法: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 秩: 3.

例2. （同济5版，第64页）设$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$，求$A$的阶梯形.

解： ▶　定义 + 新定义

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix},$$

▶　矩阵 + 分数自由高斯消元法

A, 分数自由高斯消元法: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例3. 设$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$，求$B$的行最简形.

解： ▶ 定义 + 新定义

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

▶ 矩阵 + 行最简阶梯形矩阵

B, 行最简阶梯形: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.2 矩阵的秩

例4. （同济5版，第67页）设$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求$A$的秩，并求$A$的一个最高阶非零子式.

解： ▶ 定义 + 新定义

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

▶ 矩阵 + 秩，或：矩阵 + 高斯消元法，矩阵 + 秩

A, rank: 4,

A, 高斯消元法: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 秩: 4.

由阶梯形中三个非零首元的位置，知原矩阵的前三行以及$1, 2, 4$列的子式不为零.

3.3 齐次线性方程组

例5.（同济5版，第97页）求齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系与通解.

解： ▶ 先将系数矩阵化为行最简形.

$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$，对应矩阵: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 2 & 0 \\ 7 & -7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

▶ 矩阵 + 行最简阶梯形矩阵，重写 + 矩阵作为方程形式，矩阵 + 重组

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 2 & 0 \\ 7 & -7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 行最简阶梯形: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

对应方程: $\{0=0, x_1-\frac{2}{7}x_3-\frac{3}{7}x_4=0, x_2-\frac{5}{7}x_3-\frac{4}{7}x_4=0\}$, $\left\{ \begin{array}{c} 0=0 \\ x_1-\frac{2}{7}x_3-\frac{3}{7}x_4=0 \\ x_2-\frac{5}{7}x_3-\frac{4}{7}x_4=0 \end{array} \right\}$,

即$\begin{cases} x_1=\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_4 \\ x_2=\frac{5}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4 \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases}$,方程组的通**解**：$\begin{cases} x_1=\frac{2}{7}c_1+\frac{3}{7}c_2 \\ x_2=\frac{5}{7}c_1+\frac{4}{7}c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$，即$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2$（$c_1,c_2$是任意实数），

其中$\xi_1=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$是方程组的基础解系.

可以直接求出齐次线性方程组$AX=0$的通解.

▶ 解方程 + 精确解，矩阵 + 重组

$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$，解是: $\{x_2=x_2, x_4=\frac{7}{4}x_2-\frac{5}{4}x_3, x_1=\frac{3}{4}x_2-\frac{1}{4}x_3, x_3=x_3\}$

, $\left\{ \begin{array}{c} x_2=x_2 \\ x_4=\frac{7}{4}x_2-\frac{5}{4}x_3 \\ x_1=\frac{3}{4}x_2-\frac{1}{4}x_3 \\ x_3=x_3 \end{array} \right\}$,即$\begin{cases} x_1=\frac{3}{4}x_2-\frac{1}{4}x_3 \\ x_2=x_2 \\ x_3=x_3 \\ x_4=\frac{7}{4}x_2-\frac{5}{4}x_3 \end{cases}$,方程组的通**解**：$\begin{cases} x_1=\frac{3}{4}c_1-\frac{1}{4}c_2 \\ x_2=c_1 \\ x_3=c_2 \\ x_4=\frac{7}{4}c_1-\frac{5}{4}c_2 \end{cases}$,

即$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2$（c_1,c_2是任意实数），

其中$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\1\\0\\\frac{7}{4}\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\\1\\-\frac{5}{4}\end{pmatrix}$是方程组的基础解系.

例6.（同济5版，97页）求齐次线性方程组：$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=0,\\2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0,\\7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$ 的基础解系与通解.

解： ▶ 写出线性方程组的系数矩阵

$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=0\\2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0\\7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}$，对应矩阵: $\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\2&-5&3&2\\7&-7&3&1\end{bmatrix}$,

▶ 矩阵 + 零空间基

$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-5&3&2\\7&-7&3&1\end{pmatrix}$, 零空间基: $\left\{\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\1\\0\\\frac{7}{4}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\\1\\-\frac{5}{4}\end{pmatrix}\right\}$,即为齐次线性方程组的基础解系，通解为$\begin{cases}x_1=\frac{3}{4}c_1-\frac{1}{4}c_2\\x_2=c_1\\x_3=c_2\\x_4=\frac{7}{4}c_1-\frac{5}{4}c_2\end{cases}$，即$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2$（$c_1,c_2$是任意实数），

其中$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$.

3.4 非齐次线性方程组

例7.（同济5版，第101页）求线性方程组：$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\x_1-x_2+x_3+-3x_4=1,\\x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\frac{1}{2}\end{cases}$ 的通解.

解： 先将增广矩阵化为行最简形.

▶ 矩阵 + 行最简阶梯形矩阵

$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+-3x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\frac{1}{2} \end{cases}$, 对应矩阵: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

行最简阶梯形: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

▶ 重写 + 矩阵作为方程形式，矩阵 + 重组

对应方程: $\{0=0, x_1-x_2-x_4=\frac{1}{2}, x_3-2x_4=\frac{1}{2}\}$, $\begin{Bmatrix} 0=0 \\ x_1-x_2-x_4=\frac{1}{2} \\ x_3-2x_4=\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$

即$\begin{cases} x_1=x_2+x_4+\frac{1}{2} \\ x_2=x_2 \\ x_3=2x_4+\frac{1}{2} \\ x_4=x_4 \end{cases}$,原方程组的通**解**: $\begin{cases} x_1=c_1+c_2+\frac{1}{2} \\ x_2=c_1 \\ x_3=2c_2+\frac{1}{2} \\ x_4=c_2 \end{cases}$ 或 $x=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+$ $c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

（x_2, x_4为自由变量）.

其中$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$是对应齐次方程组的基础解系，$\eta^*=$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$是原方程组的一个特解.

可以直接求出非其次线性方程组$AX=b$的通解.

例8.（同济5版，第101页）求线性方程组：$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3+-3x_4=1, \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\frac{1}{2} \end{cases}$ 的通解

解：▶ 解方程 + 精确解（输入x_1, x_2, x_3, x_4）

$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+-3x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\frac{1}{2} \end{cases}$, 解是: $\{x_3=2x_4+\frac{1}{2}, x_1=x_2+x_4+\frac{1}{2}, x_2=x_2, x_4=x_4\}$

.

第四章 向量的线性相关性

4.1 向量的线性表示

例1. （同济5版，第84页）设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，试将$\beta$表示成$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$的线性组合.

解：只需将矩阵$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta \end{pmatrix}$化为行最简形.

▶ 矩阵 + 合并，矩阵 + 行最简阶梯形矩阵

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，合并: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，行最简阶梯形: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$x_1 = -3c+2, x_2 = 2c-1.x_3 = c, \beta = x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3 = (-3c+2)\,\alpha_1+(2c-1)\,\alpha_2 + c\alpha_3, c$为任意实数.

4.2　极大线性无关组

例2.（同济5版，第93页）设$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$，求$A$的列向量组的一个极大无关组.

解：用初等行变换得到A的行最简形，则由行最简形可以看出A列向量组的极大无关组.

▶ 矩阵 + 行最简阶梯形矩阵，矩阵 + 秩

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \text{行最简阶梯形: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

秩: 3,极大线性无关组为$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

第五章　相似矩阵及二次型

5.1　正交矩阵

例1.（同济5版，第116页）验证$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$是正交矩阵.

解：只需验证$AA^T=E$（单位矩阵）.

▶ 定义 + 新定义

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

▶ 计算

$$AA^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故$AA^T=E, A$是正交矩阵.

或：

▶ 矩阵 + 正交测试

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{正交? } True.$$

5.2 矩阵的特征多项式、矩阵的特征值、矩阵的特征向量

例2. （同济5版，第118页）求矩阵$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$的特征多项式、特征值和特征向量.

解： ▶ 矩阵 + 特征多项式

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, 特征多项式: $X^2 - 6X + 8$.

▶ 矩阵 + 特征值

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, 特征值: $2, 4$.

▶ 矩阵 + 特征向量

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, 特征向量: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2, \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 4.$

例3. （同济5版，第118页）求矩阵$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$的特征多项式、特征值和特征向量.

解： ▶ 矩阵 + 特征多项式

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 特征多项式: $X^3 - 4X^2 + 5X - 2$,

▶ 矩阵 + 特征向量

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 特征向量: $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2.$

例4. （同济5版，第119页）求矩阵$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解： ▶ 矩阵 + 特征向量

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 特征向量: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -1, \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2.$

5.3 矩阵的对角化

例5. （同济5版，第125页）设$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，求矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角阵，并验证结果.

解：▶ 矩阵 + 特征向量

$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, 特征向量: $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 1,\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow -2.$

▶ 定义 + 新定义

$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$

▶ 定义 + 新定义，计算

$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2\cdot\beta_1)}{(\beta_1\cdot\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},\beta_3=\alpha_3.$

▶ 计算

$(\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1,\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2,\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3)=\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\sqrt{6}\\\frac{1}{6}\sqrt{6}\\\frac{1}{3}\sqrt{6}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\sqrt{3}\\-\frac{1}{3}\sqrt{3}\\\frac{1}{3}\sqrt{3}\end{pmatrix}\right)$

,

▶ 定义 + 新定义，计算

$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{2}&\frac{1}{6}\sqrt{6}&-\frac{1}{3}\sqrt{3}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}&\frac{1}{6}\sqrt{6}&-\frac{1}{3}\sqrt{3}\\0&\frac{1}{3}\sqrt{6}&\frac{1}{3}\sqrt{3}\end{pmatrix},P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$

例6. （同济5版，第126页）设$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$，求正交矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角阵，并求$A^n$.

解：▶ 矩阵 + 特征向量

$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, 特征向量: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 1,\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 3,$

▶ 定义 + 新定义，计算

$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$(\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1,\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2)=\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}\right),$

▶ 定义 + 新定义，计算

$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $P^TP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,即$P$是正交矩阵. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$, $A^n=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}3^n & -\frac{1}{2}3^n-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}3^n+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}3^n-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

例7. 设$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ -2 & -3 & 4\\ 2 & 4 & -3\end{pmatrix}$，求正交矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角阵，并验证结果.

解： ▶ 矩阵 + 特征向量

$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ -2 & -3 & 4\\ 2 & 4 & -3\end{pmatrix}$, eigenvectors: $\left\{\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow -8$,

▶ 定义 + 新定义，计算

$\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2\cdot\beta_1)}{(\beta_1\cdot\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{4}{5}\\ 1\end{pmatrix}, \beta_3=\alpha_3.$

$(\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1, \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2, \frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3)=\left(\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\sqrt{5}\\ \frac{1}{5}\sqrt{5}\\ 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{2}{15}\sqrt{5}\\ \frac{4}{15}\sqrt{5}\\ \frac{1}{3}\sqrt{5}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}\right)$,

▶ 定义 + 新定义，计算

$P=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}, P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}$.

$P^TP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,即$P$是正交矩阵.

5.4 二次型的标准化

例8. （同济4版，第140页）求一个正交变换$\mathbf{x}=P\mathbf{y}$，将下列二次型化为标准形：

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4.$

解： $f(\mathbf{x})=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

$=\mathbf{x}^T\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{x}^TA\mathbf{x},$

其中$A=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$为$f(\mathbf{x})$的系数矩阵．现在求一个正交矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角阵.

▶ 矩阵 + 特征向量

$A=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$, 特征向量: $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow -1, \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 1, \left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\leftrightarrow 3,$

▶ 定义 + 新定义，计算

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},$

$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2\cdot\beta_1)}{(\beta_1\cdot\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\beta_3=\alpha_3,\beta_4=\alpha_4,$

$(\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1,\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2,\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3,\frac{1}{\|\beta_4\|}\beta_4)=\left(\begin{pmatrix}\frac12\sqrt2\\0\\\frac12\sqrt2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\frac12\sqrt2\\0\\\frac12\sqrt2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac12\\-\frac12\\\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\\\frac12\\\frac12\end{pmatrix}\right),$

▶ 定义 + 新定义，计算

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{x}=P\mathbf{y}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$,则原二次型化为$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2+3y_4^2$.

---

[1]本文档利用科学工作平台Scientific WorkPlace V5.5配置的PDFLaTeX进行排版，并用Maple V5.1进行相关计算.

参考文献

[1] 同济大学数学系. 工程数学–线性代数（第六版）[M]. 北京：高等教育出版社，2014.

苏州大学精正楼（数学楼）